

## Билет №1

1) Особенности нелинейных систем и их отличие от линейных. Три условия линейности системы.

**Нелинейной системой** называется система имеющая хотя бы 1 нелинейный элемент.

Причины возникновения нелинейности.

- Несовершенство конструкции
- Добавление спец элементов
- Особенности конструкции

Примеры нелинейных систем: Солитон - структурно устойчивая уединённая волна, распространяющаяся в нелинейной среде.

Солитоны ведут себя подобно частицам (частицеподобная волна): при взаимодействии друг с другом или с некоторыми другими возмущениями они не разрушаются, а двигаются, сохраняя свою структуру неизменной. Это свойство может использоваться для передачи данных на большие расстояния без помех.

Системы с пороговым уровнем (логические элементы).

### **Необходимые условия линейности системы:**

1. Аддитивность при 0 входа/выхода
2. Линейность по отношению к начальным условиям
3. Линейность по отношению к выходу

**Аддитивность** (лат. *additivus* — прибавляемый) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, в некотором классе возможных разбиений объекта на части. Например, аддитивность объёма означает, что объём целого тела равен сумме объёмов составляющих его частей.

### **Необходимые условия линейности системы:**

**Линейная система.** Линейной системой называется такая система, для которой применим принцип суперпозиции.

Предположим, что  $c_1(t)$  есть реакция системы на входной сигнал  $r_1(t)$ , а  $c_2(t)$  — реакция на сигнал  $r_2(t)$ . Тогда, если система является линейной, ее реакция на сигнал  $a_1r_1(t) + a_2r_2(t)$ , равна  $a_1c_1(t) + a_2c_2(t)$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — константы.

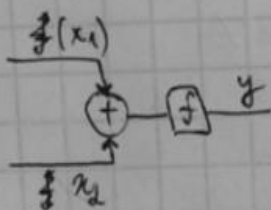
Т.е. **Линейная система** — любая система, для которой отклик<sup>[1]</sup> системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие. В математической модели линейной системы это означает, что оператор преобразования "вход-выход" линеен. Иногда линейное свойство системы называют принципом суперпозиции.

# Классические системы

## Лин. сист.

- 1) аддитивность при  $0 \text{ вх/вых}$
- 2) ЛИН. по отн. к н.у.
- 3) ЛИН-ТЬ по отн. вх

$$1: f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$



+ однородность

$$f(ax) = a f(x)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)], t \geq 0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n \\ u(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t) \in \mathbb{R}^z \end{cases}$$
$$y(t) = h[x(t), u(t)]$$

линейные в р-функции  
независ. пер-х

Классической системой называется система, реализующая хотя бы 1 классическую  $n$ - $m$

принцип возникновения классической

- \* оперетив. ограничения
- \* несовершенство конструкции
- \* добавление спец. зп-тов
- \* особенности конструкции

**9.5.5. Наблюдатели пониженного порядка.** Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \quad (9.62)$$

где  $\mathbf{x}$  —  $n$ -вектор,  $\mathbf{y}$  —  $\rho$ -вектор, причем  $n > \rho$ ,  $A, B, C$  — матрицы соответствующей размерности. Пусть матрица  $C$  имеет максимальный ранг, т.е.  $\rho$ . Тогда уравнение наблюдения дает  $\rho$  независимых линейных уравнений для неизвестного вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$ . Чтобы определить  $\mathbf{x}(t)$ , необходимо получить дополнительно  $n - \rho$  уравнений для координат этого вектора.

Введем в рассмотрение  $(n - \rho)$ -вектор  $\mathbf{p}(t)$ , определяемый соотношением

$$\mathbf{p} = C'\mathbf{x}, \quad (9.63)$$

где матрица  $C'$  такова, что матрица  $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$  является невырожденной (неособой). Из уравнения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

находим

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Используя представление

$$\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = [L_1 \quad L_2], \quad (9.64)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  —  $(n \times \rho)$ - и  $[n \times (n - \rho)]$ -матрица соответственно, получаем

$$\mathbf{x} = L_1\mathbf{y} + L_2\mathbf{p}. \quad (9.65)$$

Если получить оценку  $\widehat{\mathbf{p}}$  для введенного вектора, то для оценки фазового вектора имеем

$$\widehat{\mathbf{x}} = L_1\mathbf{y} + L_2\widehat{\mathbf{p}}. \quad (9.66)$$

Таким образом, задача восстановления фазового вектора свелась к задаче восстановления вектора  $\mathbf{p}$  меньшей размерности. Используя определенные выше матрицы  $C', L_1$  и  $L_2$ , можно определить искомый наблюдатель.

$\dot{\hat{v}}(t) - \dot{v}(t)$  - динамика ошибки наблюдения

$$\dot{\hat{v}}(t) - \dot{v}(t) = (A_{11} - EA_{21})(\hat{v}(t) - v(t))$$

$$\dot{\xi} = (A_{11} - EA_{21})\xi$$

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = A_{11} - EA_{21}$$

Решение этого уравнения это экспонента в степени

Что бы оно сходилось к нулю

$$\hat{v}(t) - v(t) \rightarrow 0$$

Необходимо чтобы степень была отрицательной, по этому

$$A_{11} - EA_{21} < 0$$

Ошибка, динамика которой сходится



## Билет №2

### 1) Основные математические и структурные модели нелинейных систем. Общая структура нелинейной системы.

$\dot{x}(t) = f[x(t)] + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i(t)$  – уравнение состояния, которое зависит от текущего состояния системы и какого-то управления (нелинейного)

$y_i(t) = h_i[x(t)]; \quad 1 < i \leq r$  – уравнение выхода

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad \text{вектор столбец функций} \quad g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{i1}(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_{in}(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

$$h_i(x) = h_i(x_1, \dots, x_n) \quad h_i(x) = C_i$$

$f(x) = A \cdot x$  – уже линейная система при  $h_i(x) = C_i$

$$g_i(x) = b_i$$

$$i = \overline{1; m}$$

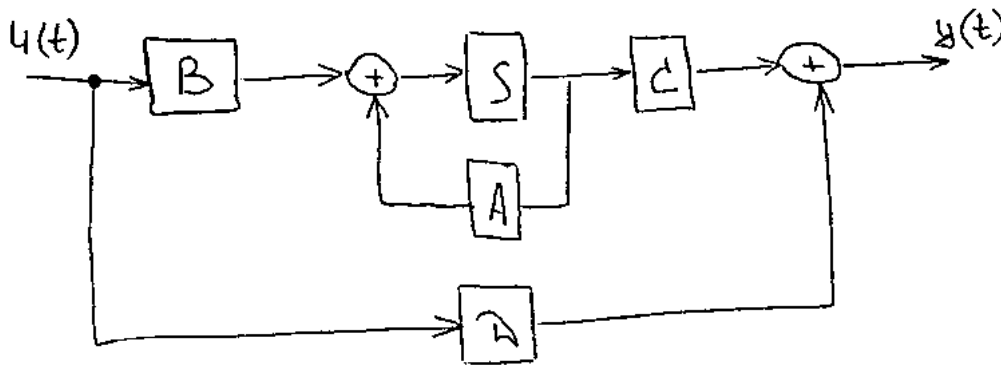


Рисунок модели состояния системы

Написано тоже самое, только в векторах и матричных функциях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) & \text{Уравнение состояния} \\ y(t) = C \cdot x(t) & \text{Уравнение выхода} \end{cases}$$

$$x \in R^n; \quad u \in R^m; \quad y \in R^r$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} w(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t w(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau.$$

где  $\int_{-\infty}^{t_0} w(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$  – реакция системы на 0-ой вход;

$\int_{t_0}^t w(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$  – реакция системы на вход при нулевом векторе состояний;

$$w(t) = C \cdot e^{At} \cdot B \text{ – весовая матрица.}$$

Для скалярных систем весовая функция – реакция системы на  $\delta(t)$

$$\underline{y(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t C(\tau) \cdot e^{A(t-\tau)} \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau}$$

при ненулевых н.у.

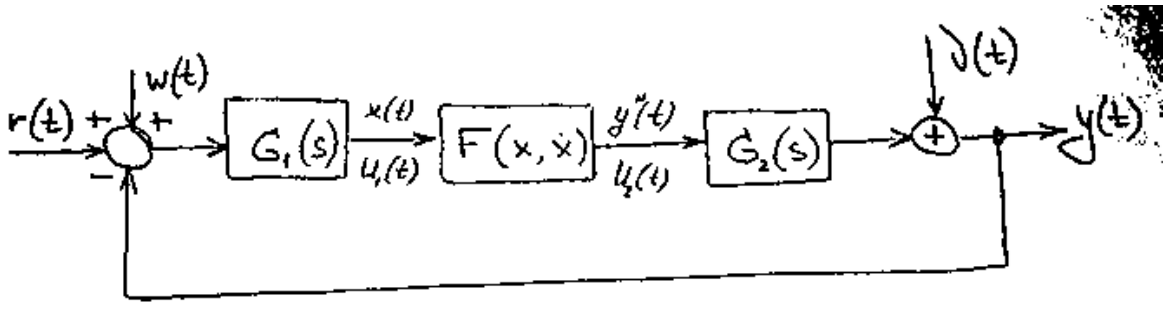
$U=0$  – управление.

$t \geq t_{0-}$

$$x(t_{0-}) = 0 \rightarrow I(s) = G(s)U(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B$$

Общая структура нелинейной системы



$r(t)$  – задающий сигнал (значение уставки);

$y(t)$  – выходной сигнал (реакция системы);

$w(t)$  – внешнее возмущение;

$x(t), U_1(t)$  – вход нелинейной части системы  $F(x, \dot{x})$  ;

$x(t), U_2(t)$  – выход нелинейной части системы;

$u(t)$  – шумы измерения выходного сигнала;

$G_1(t), G_2(t)$  – математическая модель линейных частей системы;

$F(x, \dot{x})$  – математическая модель нелинейной части системы.

2. Теорема Котельникова (прерывания, Шеннона). Спектр дискретного сигнала, нулевой портрет дискретной системы. Фиксирующий элемент (экстраполятор нулевого порядка).

Квантование по времени означает дискретизацию, замену непрерывной кривой последовательностью импульсов. Вообще говоря, такая замена может привести к потере информации. Условие, когда при квантовании по времени информация не теряется, т. е. когда по дискретным данным можно восстановить исходную кривую, определяется из теоремы Котельникова.

Если кривая  $x(t)$  (рис. 13.7) обладает конечным спектром

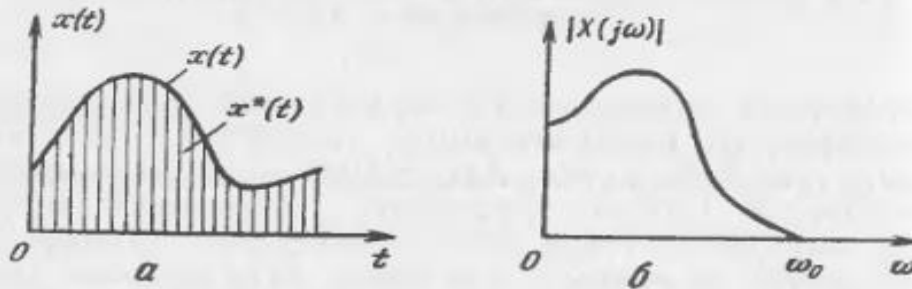


Рис. 13.7. Дискретизация и спектр непрерывного сигнала: а — квантование сигнала по времени ( $x^*(t)$  — дискретный сигнал); б — частотный спектр  $X(j\omega)$  непрерывного сигнала

(рис. 13.7 б), то информация не будет потеряна при выполнении условия

$$|\omega_0| < \frac{\pi}{T_r},$$

где  $\omega_0$  — ширина спектра, когда период повторения достаточно мал.

Сигнал  $g^*(t)$  преобразуется ЭВМ в соответствии с алгоритмом ее работы в сигнал  $x_B^*(t)$  (рис. 13.13, а), что, разумеется,

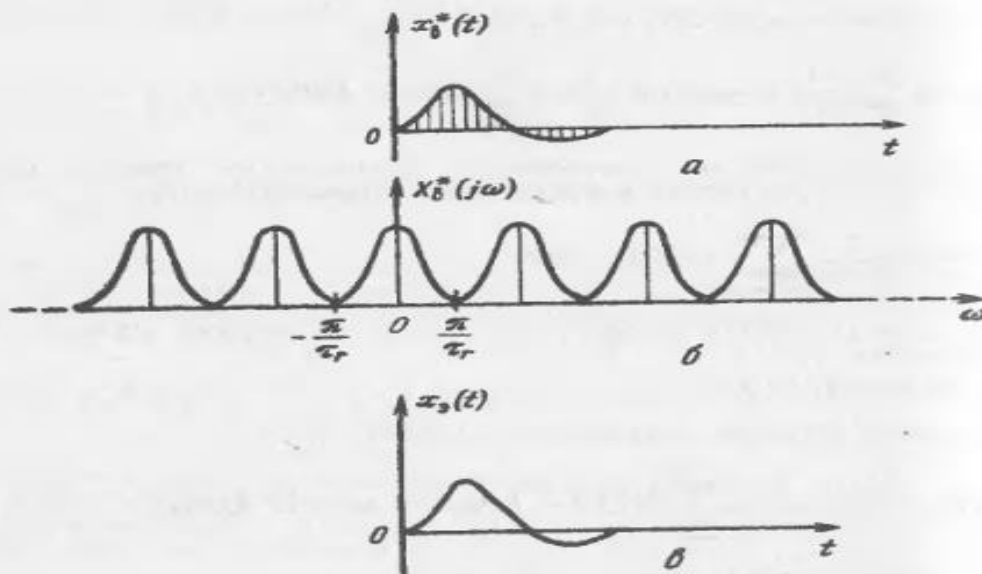


Рис. 13.13. Преобразование дискретного сигнала при его прохождении через цифровую ЭВМ и экстраполятор:

а — сигнал  $x_B^*(t)$  на выходе ЭВМ; б — частотный спектр  $X_B^*(j\omega)$  дискретного сигнала на выходе ЭВМ; в — огибающая дискретного сигнала  $x_B^*(t)$  на выходе ЭВМ

приводит к изменению его частотного спектра (рис. 13.13, б). При этом спектр  $X_B^*(j\omega)$  сигнала  $x_B^*(t)$  остается периодическим, сплошным и бесконечным. Для сопряжения ЭВМ с после-

$$u = \frac{b_1}{A} \Delta + \frac{c_1}{A\omega} \dot{\Delta},$$

которое, если принять обозначения

$$\begin{cases} q_1(A, \omega) = \frac{b_1}{A}, \\ q_2(A, \omega) = \frac{c_1}{A}, \end{cases} \quad (9.11)$$

можно записать в виде

$$u = q_1(A, \omega) \Delta + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} \dot{\Delta}. \quad (9.12)$$

Здесь  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  – коэффициенты гармонической линейризации.

Как видим, уравнение нелинейного звена (9.12) с точностью до высших гармоник является квазилинейным. При постоянных значениях амплитуды входного сигнала  $A$  коэффициенты гармонической линейризации  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  являются постоянными. Однако различным значениям амплитуды  $A$  соответствуют разные коэффициенты  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$ . В этом заключается отличие гармонической линейризации от обычной (см. разд. 8).

Таким образом, вместо нелинейного элемента с характеристикой (9.6) можно рассматривать эквивалентное линейное звено, поведение которого описывается уравнением (9.12). Оно может быть представлено в операторной форме

$$u = \left[ q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \right] \Delta. \quad (9.13)$$

Для гармонически линейризованного нелинейного элемента можно записать передаточную функцию

$$W_{\text{нз}}(p, A, \omega) = \frac{u}{\Delta} = q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \quad (9.14)$$

и получить из нее выражение для частотной характеристики

$$W_{\text{нз}}(A, j\omega) = q_1(A, \omega) + jq_2(A, \omega). \quad (9.15)$$

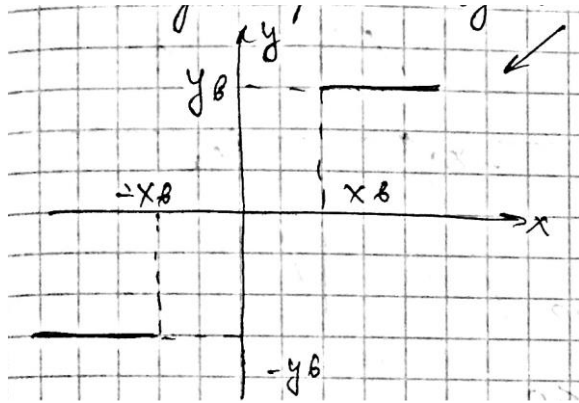
### Билет №3

1) Основные специфические свойства НЛС. Неограниченный рост сигнала в ограниченное время.

Зависимость поведения от начальных условий.

1. Основные свойства НЛС:

- Неограниченный рост сигнала за ограниченное время  $t$ .



Неограниченный рост, например.

- Особые точки системы.

Их может быть несколько

- Периодические незатухающие колебания в НС называются предельным циклом.

Они могут быть несинусоидальными и с другой стороны они могут быть на такой частоте, на которой вход. Но не обязательно.

- Неединственность динамических характеристик.

- Скачок амплитуды в резонансе

Два этих пункта можно объединить.

- Синхронизация.

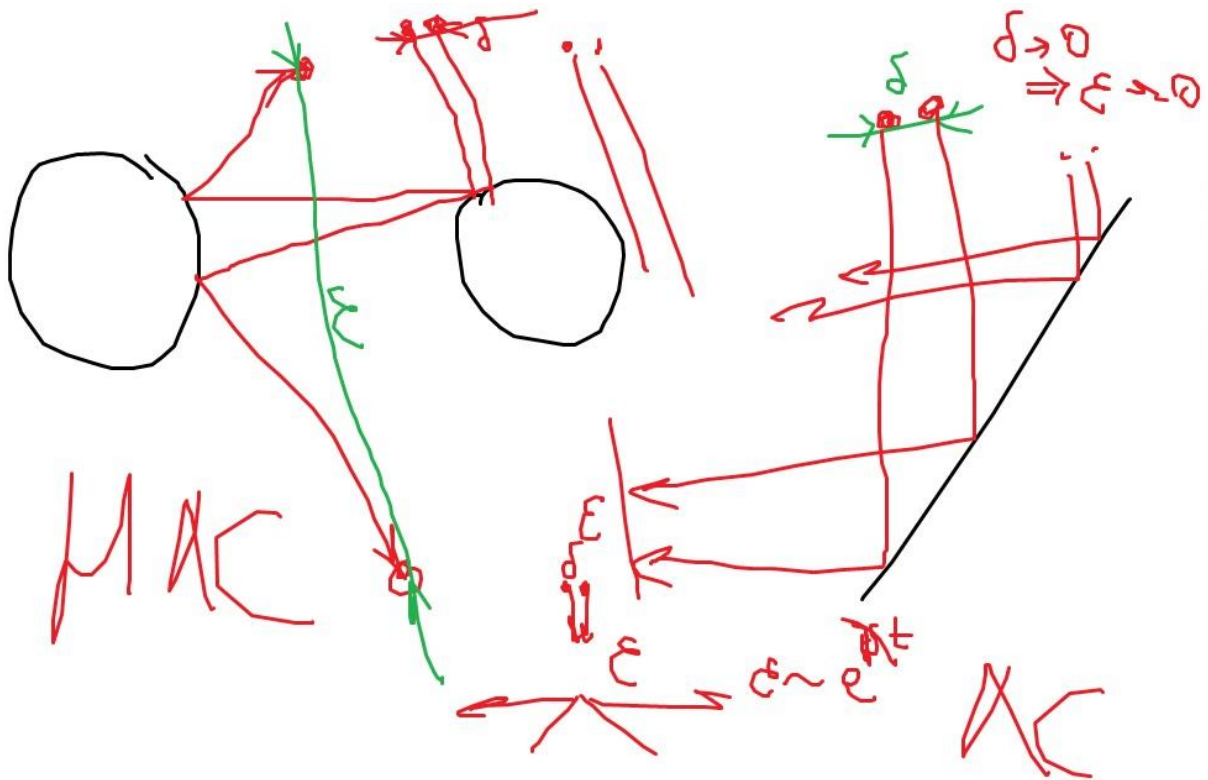
Японское видео с метрономами (особенность нелинейных маятников)

- Структурная неустойчивость (бифуркация) – перестройка фазового портрета.

Метод описания структурной неустойчивости.

- Хаотическая динамика.

Если у нас есть система и мы с ней что-то сделали и оставили в каких-то начальных условиях она будет как-то двигаться в фазовом пространстве, если система не хаотическая и мы сделали все тоже, что и в прошлый раз, она будет двигаться практически так же, как и раньше, а хаотическая будет двигаться произвольно.



Хаотическая динамика – динамика хаотических систем.

В 5 вопросе еще есть хаотическая динамика.

- Хаос (то же самое, что и хаотическая динамика)
2. Неограниченный рост сигнала в ограниченное время:

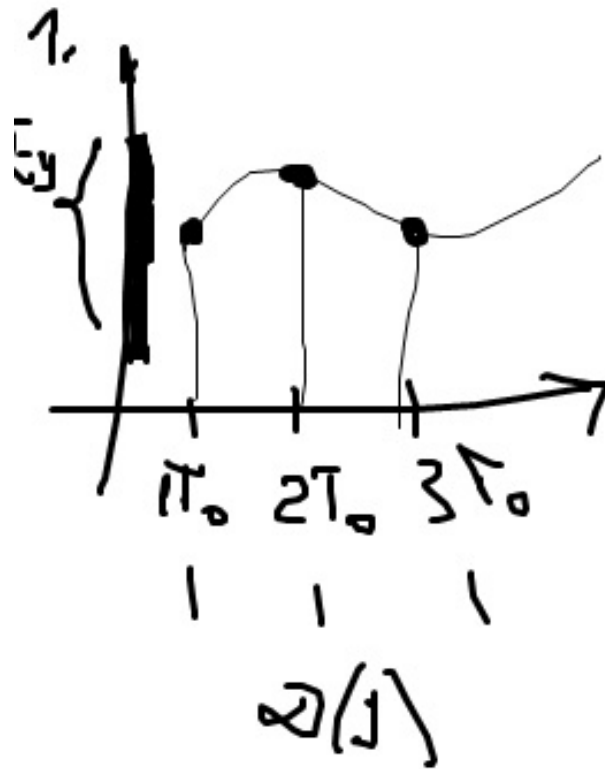
$$\dot{x} = x^2; \quad x(0) = x_0; \quad t = \frac{1}{x_0}$$

3. Зависимость поведения от начальных условий:

Устойчивость НС может зависеть от входных сигналов и (или) начальных условий. Одна и та же НС при одном входном воздействии устойчива, а при другом нет.

## 2 билет

Дискретные по времени функции и разностные уравнения.



Запишем разностные уравнения (правая и левая разности соответственно):

$$\begin{aligned}
 & x(n+1) - x(n) = F(x) = \Delta x \\
 & x(n) - x(n-1) = F(x) = \nabla x
 \end{aligned}$$

(дельта и набла)

Пример преобразования экспоненциальной функции из непрерывной в дискретную.

Дана какая-то непрерывная экспоненциальная функция:

$$y(t) = e^{\alpha t}$$

Фактически наш переход от непрерывного времени к дискретному

$$t \rightarrow nT_0$$

отражается следующим образом:

$$y(t) \rightarrow y(n) = e^{\alpha \cdot n T_0} = e^{\alpha T_0 \cdot n}$$

$y(n)$  – дискретная функция.

Представление явной функции в виде разностного уравнения:

См. пункт 2, но лучше взять из учебника.

Левые и правые производные:

Определение производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если функция определено только в дискретный момент времени  $T_0$ :

$$f'(n T_0) \Rightarrow f(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{T_0} =$$

$$(n) - (n-1) = \nabla f$$

$$\underline{(n+1)T_0 - nT_0 = T_0}$$

Два равно = это имеется ввиду что ИгорьАж сказал либо так либо так, хз.

Левые и правые разности заменяют производные.

Пример дискретизации уравнения первого порядка:

См. в учебнике или в лекциях.



$$\frac{dy}{dt} = ax$$

$$\Delta y = ax$$

$$y(n+1) = ax + y(n)$$

Дифференциальное и дискретное уравнения.

Решетчатые функции: см. книгу.

во временной области. Они представляют собой последовательности импульсов, появляющихся в определенные моменты времени. Обычно дискретный сигнал получается в результате периодического прерывания непрерывного сигнала с постоянным тактом. Существуют разные способы модуляции отдельных импульсов, входящих в последовательность. Они отличаются допустимыми значениями амплитуд, шириной импульсов и модулирующей частотой. В цифровых системах управления обычно применяется лишь амплитудная модуляция импульсов, причем в основном тот ее вариант, при котором высота импульса пропорциональна текущему значению непрерывного сигнала, ширина постоянна, а интервалы между импульсами одинаковы и равны такту квантования (см. рис. 3.1.1). Поскольку к дискретным сигналам этого типа применима теорема суперпозиции, они описываются линейными соотношениями, аналогичными по форме уравнениям линейных динамических систем. Рис. 3.1.1 иллюстрирует принцип получения последовательности импульсов, основанный на пропускании непрерывного сигнала  $x(t)$  через ключ, который периодически, с тактом квантования  $T_0$ , замыкается на время  $h$ . Если длительность импульса  $h$  существенно меньше такта квантования  $T_0$ , а за ключом стоит линейное звено с постоянными времени  $T_1 \gg h$ , то последовательность импульсов  $x_p(t)$  можно

приближенно рассматривать как дискретный сигнал  $x_T(kT_0)$ , показанный на рис. 3.1.2. В этом случае ключ действует как идеальный квантователь, и величины  $x_T(kT_0)$  равны мгновенным значениям амплитуд.

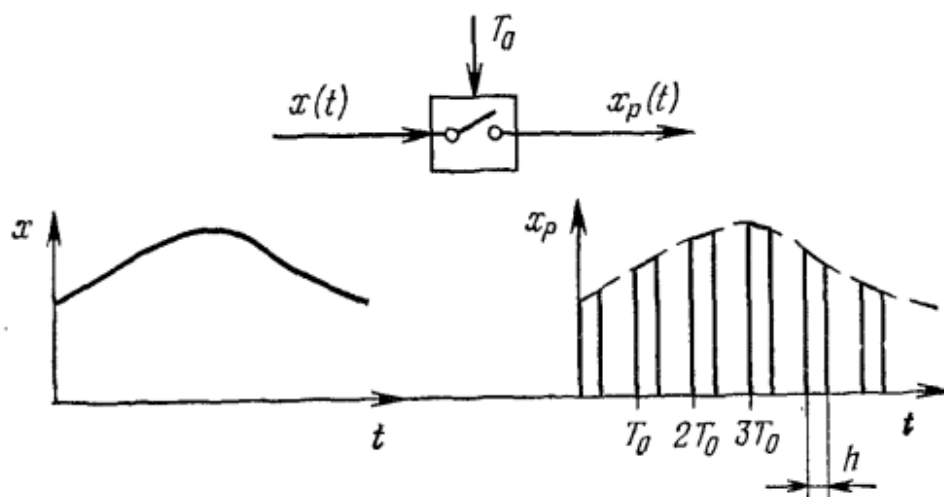


Рис. 3.1.1. Формирование амплитудно-модулированного дискретного сигнала путем пропускания непрерывного сигнала через ключ с периодом замыкания  $T_0$  и продолжительностью замыкания  $h$ .

Модулированная по амплитуде дискретная функция  $x_T(t)$ , получаемая путем квантования по времени непрерывного сигнала  $x(t)$  с постоянным тактом  $T_0$ , математически описывается выражением

$$\left. \begin{aligned} x_T(t) &= x(kT_0) \text{ при } t = kT_0, \\ x_T(t) &= 0 \text{ при } kT_0 < t < (k+1)T_0; \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1-1)$$

Формирование дискретных по времени функций различных типов иллюстрируется приведенными ниже примерами.

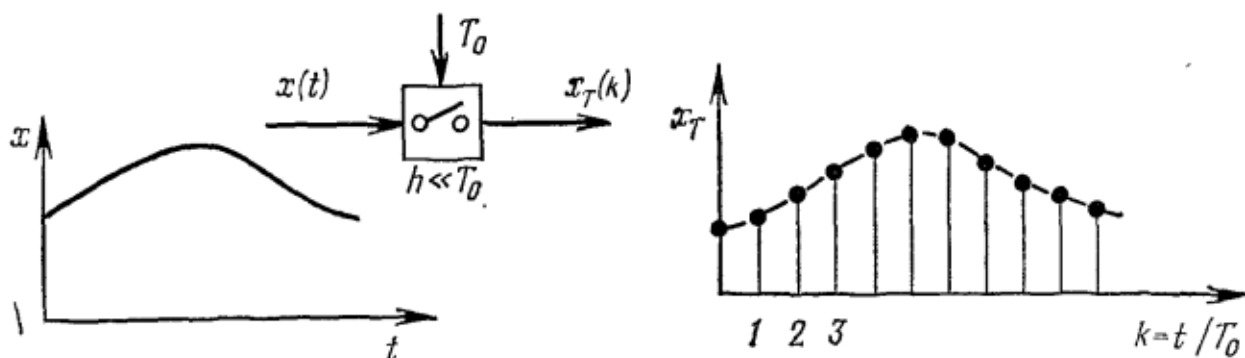


Рис. 3.1.2. Дискретный сигнал  $x_T(k)$ , получаемый на выходе квантователя ( $h \ll T_0$ ).

### Пример 3.1.1.

а) В результате квантования непрерывная функция времени

$$x(t) = e^{-\alpha t}$$

преобразуется в дискретную по времени функцию ( $t = kT_0$ )

$$x(kT_0) = e^{-\alpha kT_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, эти функции связаны явным соотношением

$$x_T(t) = x(kT_0).$$

б) Операция интегрирования

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^t w(t) dt$$

выполняется численно путем аппроксимации  $w(t)$  ступенчатой функцией. При этом интеграл заменяется суммой

$$x(kT_0) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^{k-1} T_0 w(vT_0).$$

Поскольку  $x(kT_0)$  зависит от второй дискретной функции, т. е.

$$x_T(t) = x(kT_0) = f[w(vT_0), kT_0],$$

результат записывается в неявной форме.

В следующем примере показывается, как неявную функцию можно представить в виде разностного уравнения.

**Пример 3.1.2.** Из выражения, полученного в примере 3.1.1, б, следует, что

$$x((k+1)T_0) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^k T_0 w(vT_0).$$

После вычитания имеем

$$x((k+1)T_0) - x(kT_0) = \frac{T_0}{T} w(kT_0)$$

или

$$x(k+1) + a_1 x(k) = b_1 w(k).$$

Уменьшив  $k$  на 1, приходим к окончательному соотношению

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 w(k-1),$$

где  $a_1 = -1$ ;  $b_1 = T_0/T$ .

Это — линейное разностное уравнение первого порядка.

Для получения разностного уравнения достаточно любую дискретную функцию, зависящую от другой дискретной функции, представить в рекуррентной форме. Линейное разностное уравнение порядка  $m$  имеет вид

$$\begin{aligned} x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) = \\ = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m). \end{aligned} \quad (3.1-2)$$

Здесь аргумент  $kT_0$  заменен индексом  $k$ . Величину выходного сигнала при любом  $k$  можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} x(k) = -a_1 x(k-1) - \dots - a_m x(k-m) + \\ + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m), \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

если известны текущее значение входа  $w(k)$  и  $m$  предшествующих значений  $w(k-1), \dots, w(k-m)$ , а также соответствующие значения выхода  $x(k-1), \dots, x(k-m)$ .

Другой способ построения разностных уравнений состоит в дискретизации дифференциальных уравнений. При этом дифференциальное уравнение первого порядка аппроксимируется разностным уравнением первого порядка, дифференциальное уравнение второго порядка — разностным уравнением второго порядка и т. д. При замене дифференциалов левыми разностями справедливы следующие соотношения:

<u>Непрерывная функция</u>	<u>Дискретная функция</u>
первая производная $\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$	разность первого порядка $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$
вторая производная $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t}$	разность второго порядка $\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= \Delta x(k) - \Delta x(k-1) = \\ &= x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) \end{aligned}$
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

В следующем примере показано, как осуществляется дискретизация дифференциального уравнения первого порядка.

**Пример 3.1.3.** Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$T \frac{dx(t)}{dt} = w(t).$$

Заменяя дифференциал левой разностью, полученной при такте квантования  $T_0$ , имеем выражение

$$x(k) - x(k-1) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Если для дискретизации применяется правая разность

$$\Delta x'(k) = x(k+1) - x(k),$$

то получается то же уравнение, что и в примере 3.1.2:

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Описанные способы аппроксимации дают удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда такт квантования  $T_0$  мал по сравнению с постоянной времени  $T$ .

Выражение (3.1-2) является наиболее распространенной формой записи разностных уравнений. Если использовать разности высших порядков вплоть до  $m$ -го, разностное уравнение можно представить

в виде, аналогичном дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \alpha_m \Delta^m x(k) + \alpha_{m-1} \Delta^{m-1} x(k) + \dots + \alpha_1 \Delta x(k) + x(k) = \\ = \beta_m \Delta^m w(k) + \beta_{m-1} \Delta^{m-1} w(k) + \dots + \beta_1 \Delta w(k) + \beta_0 w(k). \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

Впоследствии будет описан еще один метод получения разностных уравнений, справедливый и при больших значениях такта квантования  $T_0$ .

**Разностные уравнения.** В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать *разностные уравнения (уравнения в конечных разностях)*. При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид

$$b_0 \Delta^m y[n] + b_1 \Delta^{m-1} y[n] + \dots + b_m y[n] = f[n], \quad (15.14)$$

где  $f[n]$  — заданная, а  $y[n]$  — искомая решетчатые функции. При  $f[n] \equiv 0$  уравнение (15.14) становится однородным разностным уравнением, решением которого будет  $y[n]$ .

При использовании (15.8) разностное уравнение (15.14) можно записать в другом виде:

$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_m y[n] = f[n]. \quad (15.15)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются из зависимости

$$a_k = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (15.16)$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!} \quad (15.17)$$

При использовании обратных разностей уравнение в конечных разностях будет

$$b_0 \nabla^m y [n] + b_1 \nabla^{m-1} y [n] + \dots + b_m y [n] = f [n]. \quad (15.18)$$

С учетом формулы (15.9) последнее выражение приобретает вид

$$a_0 y [n] + a_1 y [n-1] + \dots + a_m y [n-m] = f [n]. \quad (15.19)$$

Коэффициенты последнего уравнения определяются выражениями

$$a_{m-k} = \sum_{v=0}^k (-1)^{m-k} b_v C_{m-v}^{k-v}, \quad (15.20)$$

$$C_{m-v}^{k-v} = \frac{(m-v)!}{(k-v)!(m-k)!} \quad (15.21)$$

Разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения  $y [n+m]$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$  для заданных начальных значений  $y [0], y [1], \dots, y [m-1]$  и уравнения вида (15.15) или значения  $y [n]$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$  для заданных начальных значений  $y [n-m], y [n-m+1], \dots, y [n-1]$  и уравнения вида (15.19). Такие вычисления легко механизуются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже в случае, когда коэффициенты разностных уравнений  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение однородного разностного уравнения при некрратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y [n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_m z_m^n, \quad (15.22)$$

где  $z$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (15.23)$$

а  $C_i$  — произвольные постоянные.

Из (15.22), в частности, вытекает условие того, чтобы свободное движение системы, описываемой разностным уравнением (15.15), было бы затухающим (условие устойчивости):

$$|z_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.24)$$

Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используются дискретное преобразование Лапласа,  $z$ -преобразование,  $w$ -преобразование, а также частотные методы, которые будут изложены ниже.



Решетчатая функция времени  $x[nT]$ , или в сокращенной записи  $x[n]$  - это математическая функция, значения которой определены в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени  $t = nT$ , где  $n$ - целое положительное число  $0, 1, 2 \dots$ , а  $T$  - период дискретности. То есть решетчатая функция представляет собой числовую последовательность:

$$x[0], x[1T], x[2T], x[3T], \dots, x[kT], \dots$$

Если период дискретности  $T$  задан, то решетчатая функция однозначно формируется из исходной непрерывной.

Обратная задача - формирование непрерывной функции из решетчатой - не может быть решена однозначно без дополнительных сведений о поведении функции в интервале между точками  $t = nT$ , так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций.

Решетчатые функции

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \text{ c} \quad (6)$$

$$x_p(t) \approx x_\delta(t) = \frac{x(t)}{1c} \times \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$t = kT_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_\delta(t) = \frac{h}{1c} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0) \quad (8)$$

$h$  настолько маленькая величина, что мы можем использовать вместо нее  $\delta$  функцию.

Интеграл от дельта функций равен единице, а дискретная функция представляет собой произведение дельта функции на какое-то число.

Условие  $h = T_0$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0) \quad (9)$$

Ур-ние (9) справедливо при  $h \ll T_0$  и при условии равномерной дискр. с-мы, т.е.  $G(s) = \frac{Z(s)}{Ms}$

Преобразование Лапласа. Аналогично к аналогу дискрет. ф-ции времени

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad (2.2)$$

$$kT_0 \quad \mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\} = e^{-kT_0 s} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) e^{-kT_0 s} \quad (2.4)$$

решетч. ф-ция

Фр-ие Лапласа дискрет. ф-ции времени эквивалентно периодической ф-ции с частотой повторения  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  (2.5)

$$X^*(s + j\omega_0) = X^*(s), \quad \forall s \in \mathbb{Z}$$

люб. макс. число

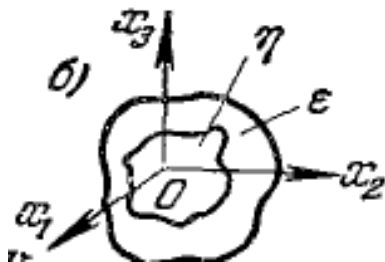
$$s = (\sigma + j\omega) \rightarrow 2.6$$

$$X^*(\sigma + j(\omega + \omega_0 \nu)) = X^*(\sigma + j\omega) \quad \forall \nu \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$



## Билет №4

1) Устойчивость и особые точки НЛС. Аттракторы и репеллеры.



**Формулировка понятия устойчивости по Ляпунову.** Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области  $\varepsilon$  (рис. 16.7, б) можно найти такую область  $\eta$ , что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области  $\varepsilon$  при любом сколь угодно большом значении времени  $t$ .

**Определение 3.1.** Точка  $x = x^* \in \mathcal{X}$  называется *равновесным состоянием* (положением равновесия) системы (3.1), если для всех  $t \geq 0$  выполняется

(1, стр. 481)

$$x(t, x^*) = x^*.$$

Как следует из определения, необходимым и достаточным условием равновесия системы в точке  $x^*$  является выполнение равенства

$$f(x^*, t) = 0$$

для всех  $t \geq 0$ .

(2, стр. 62)

Особая точка (точка равновесного состояния)  $x(t)$  устойчива, если

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0 \exists \delta > 0: \text{при } \|x_0 - y_0\| < \delta, \forall t > 0$$

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon - \text{простая устойчивость}$$

$$\lim \|x(t) - y(t)\| = 0 - \text{асимптотическая устойчивость}$$

Устойчивая точка, притягивающая фазовые траектории, называется **аттрактором**.

Пусть  $X_e$  - притягивающая точка равновесия.  $S$  - траектория

$$\forall t_0 (t > 0) \in \mathbb{R}_+ \exists \eta(t_0): \|x_0\| < \eta(t_0) \Rightarrow S(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow X_e (t \rightarrow \infty) - \text{аттрактор}$$

Неустойчивая точка, от которой отталкиваются фазовые траектории, называется **репеллером**.

$$\forall t_0 (t < 0) \in \mathbb{R}_+ \exists \eta(t_0): \|x_0\| < \eta(t_0) \Rightarrow S(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow X_e (t \rightarrow \infty) - \text{репеллер (источник 5)}$$

Точки, устойчивые по одним координатам и неустойчивые по другим, называются седловыми точками.

Якобиан в устойчивой точке  $> 0$ .

**Надо дать 3 определения устойчивости по Ляпунову, Пуассону и Лагранжу (взять из Лекций).**

Особые точки могут порождать вокруг себя либо притягивающее, либо отталкивающее многообразие. В первом случае они называются аттракторами, во втором репеллерами. Притягивающее многообразие – множество фазовых траекторий, которые в эту точку попадают. Соответственно отталкивающее – это множество точек, которые от этой точки убегают.

2) z-преобразование. Переход к z-преобразованию импульсного сигнала. Обратное z-преобразование.

Z-преобразованием (преобразованием Лорана) называют свёртывание исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временной области, в аналитическую функцию комплексной частоты.

дискретные передаточные функции:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) \delta(t - kT_0) \quad (4.1)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) f(t - kT_0) \quad (4.2)$$

$$t = nT_0 \quad y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) f((n-k)T_0) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} u((n-\nu)T_0) f(\nu T_0) \quad (4.3)$$

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0) e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) f(n-k)T_0 e^{-nTs} \quad (4.4)$$

$$q = n - k$$

$$y^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) f(qT_0) e^{-qTs} e^{-kTs} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} f(qT_0) e^{-qTs} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) e^{-kTs}$$

$$y^*(s) = G^*(s) u^*(s) \quad (4.5)$$

дискр. передат. функции:

$$G^*(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} f(qT_0) e^{-qTs} \quad (4.6)$$

$$z = e^{Ts} \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} f(qT_0) z^{-q} = z \{ f(q) \} \quad (4.7)$$

Объяснение того, что выше: Переход к z-преобразованию дискретного сигнала. В пространстве Лапласа изображение выходной величины:

$$Y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0) e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) g(n-k)T_0 e^{-nTs} \quad (4.4)$$

Далее вводим дискретную передаточную функцию, как отношение выходной величины к входной:

дискр. передат. функции:

$$G^*(s) = \frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0) e^{-qTs} \quad (4.6)$$

Эта формула практически повторяет преобразование Лапласа. Делая следующую замену:

$$z = e^{Ts}$$

Получаем передаточную функцию в следующем виде:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0) z^{-q} = z \{g(q)\} \quad (4.7)$$

## Обратное Z-преобразование [\[ править | править вики-текст \]](#)

Обратное Z-преобразование определяется, например, так:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

где  $C$  — контур, охватывающий область сходимости  $X(z)$ . Контур должен содержать все **вычеты**  $X(z)$ .



В случае статической нелинейной характеристики вместо (9.6) имеем

$$u = f(\Delta)$$

и уравнение (9.13) принимает вид [1]

$$u = \left[ q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega} p \right] \Delta, \quad (9.16)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации  $q_1(A)$  и  $q_2(A)$  зависят только от амплитуды. При этом получим передаточную функцию

$$W_{\text{нз}}(p, A, \omega) = q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega} p \quad (9.17)$$

и частотную характеристику

$$W_{\text{нз}}(A, j\omega) = q_1(A) + jq_2(A) \quad (9.18)$$

статического нелинейного звена.

Для однозначной статической нелинейной характеристики коэффициент  $q_2(A) = 0$ , и вместо (9.15) получим

$$W_{\text{нз}}(A, j\omega) = q_1(A). \quad (9.19)$$

Коэффициенты гармонической линеаризации типовых статических нелинейных звеньев приводятся в литературе (например, в [1, 10]).

**Билет №5**

1) Основные свойства нелинейных функций, нелинейности процесса управления (возникают управляющие воздействия, которые являются нелинейными) и нелинейности систем (возникают внутри самого объекта управления). Классификация нелинейностей. Типовые нелинейные элементы. К чему они относятся.

1. Кинем-ти, возмех. в следствии управляемых систем (наследующие)

2. Содержатся в системе для обеспечения ее функционирования.

$$y_{нл} = F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2 \text{ и т.д.}, x_n, \dot{x}_n) - \text{не зав. от } t$$

$$y_n = F(\dots, t) - \text{зав. от времени}$$

1: Насыщение, мертвая зона, сух. тр., гистер., шорт

Односторонние / двусторонние хар-ки  
 Маркис / немаркис  $\left[ \frac{d_{нл}(x)}{dx} \right]$  в контр. т.  $x \rightarrow$  марк.  
 Симметричные / несимметричные

**7.2. Классификация нелинейностей**

1. Классификация нелинейных элементов

Нелинейные зависимости  $z = f(x)$  можно классифицировать по различным признакам:

1. По гладкости характеристик: гладкая - если в любой точке характеристики существует производная  $dz/dx$ , т. е. функция дифференцируема (рис. 1а, б); кусочно-линейная - характеристика, в которой производные имеют разрыв первого (рис. 2а) или второго рода (рис. 2б).

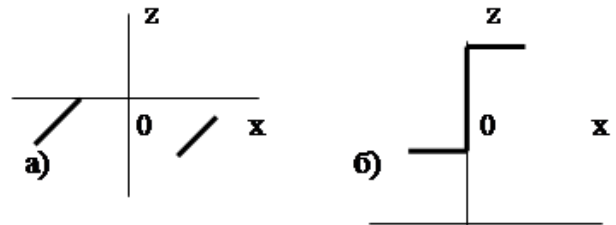
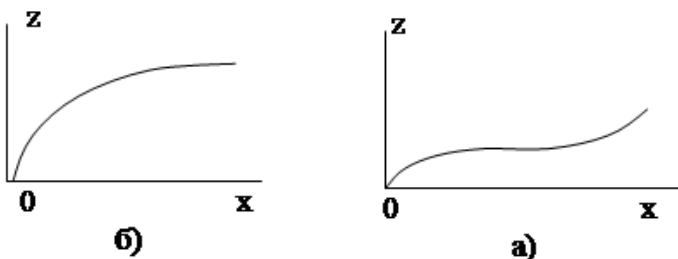


Рис. 1

Рис. 2

По однозначности: однозначные – в которых каждому значению входной величины соответствует одно значение выходной величины (рис. 3а); многозначные – в которых каждому значению входной величины  $x$  соответствует несколько значений выходной величины  $z$  (рис.3б, в, г).

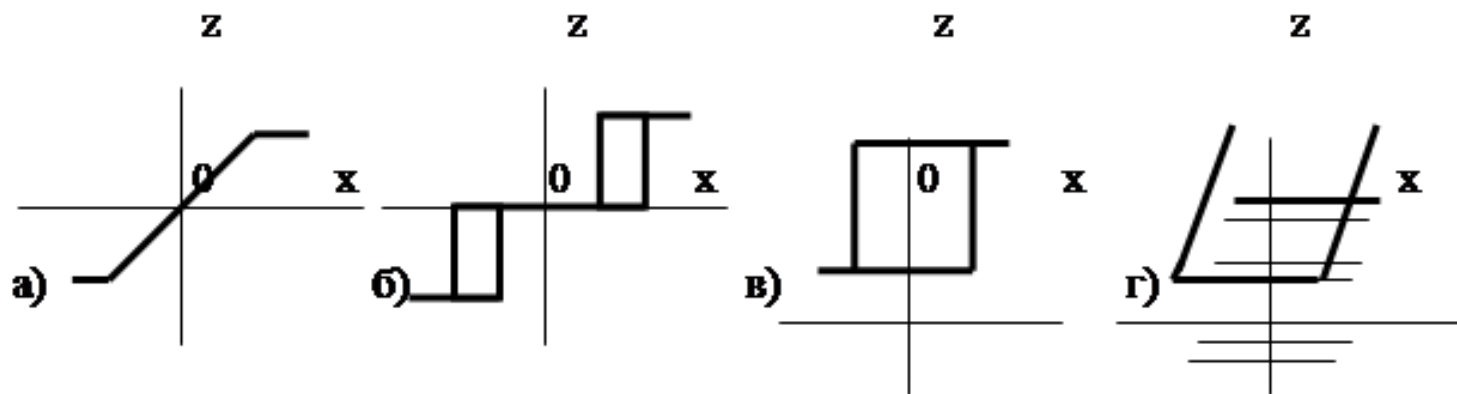


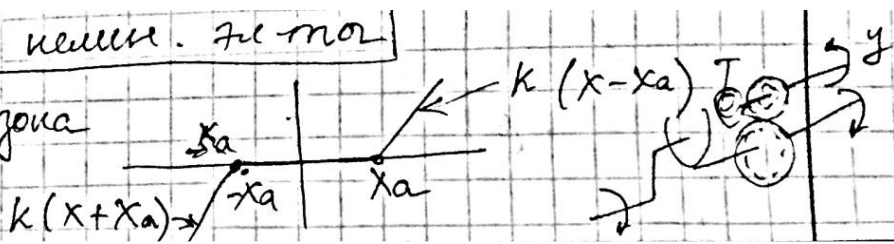
Рис. 3

По симметрии: четно-симметричные - симметричные относительно оси ординат, т. е.  $z(x) = z(-x)$  (рис. 4а); нечетно-симметричные - симметричные относительно начала координат, при этом  $z(x) = -z(-x)$ ; не симметричные.

8) Типовые нелинейные элементы. Нелинейные элементы с однозначными непрерывными характеристиками: мертвая зона, насыщение, насыщение с мертвой зоной.

Ступенчатые нелиней. функции

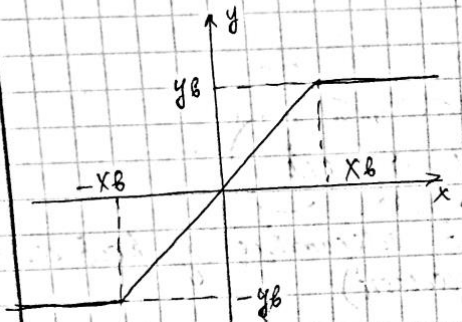
1. Мертвая зона



$$y_n = \begin{cases} 0, & |x| \leq x_a \\ k(x - x_a), & x > x_a \\ k(x + x_a), & x < -x_a \end{cases}$$

$\frac{x}{x_a} = \mu$   
(где нормализуется)

2. Касание

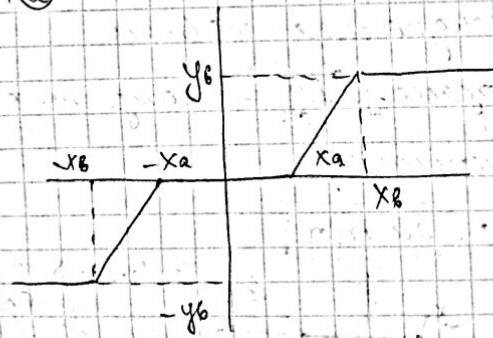


$$y_n = \begin{cases} kx & |x| \leq x_b \\ y_b \cdot \text{sign } x; |x| > x_b \\ \text{где } k = \frac{y_b}{x_b} \end{cases}$$

$\frac{x}{x_b} = \mu; \frac{y_n}{kx_b} = \eta$

$\eta = \begin{cases} \mu & |\mu| \leq 1 \\ \text{sign } \mu & |\mu| > 1 \end{cases}$  нормализованная x-ко

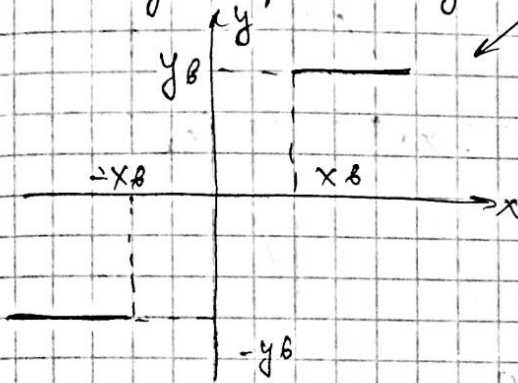
①+②=



$$\begin{cases} 0 \\ \mu - 1 \\ \mu + 1 \\ (\mu - 1) \text{sign } \mu \end{cases}$$

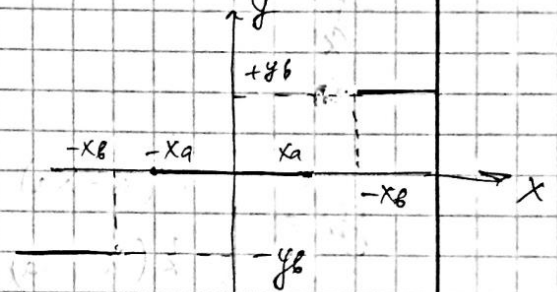
3. Климат-гидро с однозначной разрывной хар-кой

2-го порядка, реле без инерционности



$$y_N = \begin{cases} y_0 \operatorname{sign} x; & |x| \geq x_0 \\ \text{неопр} & |x| < x_0 \end{cases}$$

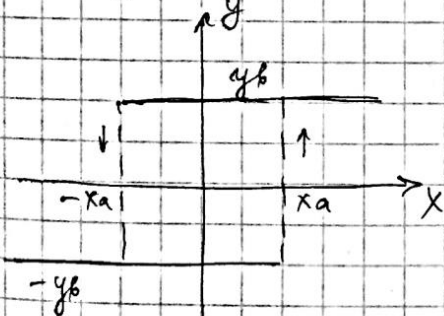
3-го порядка, реле с/инерц



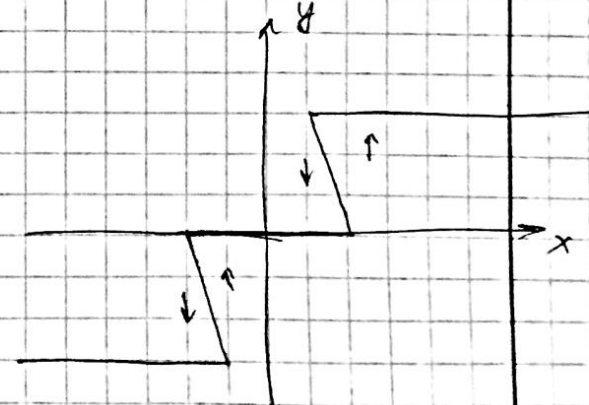
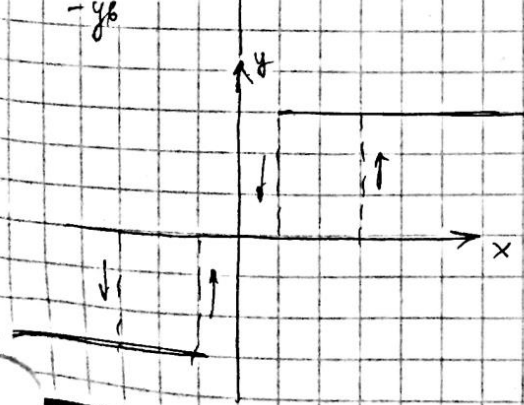
$$y_N = \begin{cases} y_0 \operatorname{sign} x; & |x| \geq x_b \\ 0; & |x| < x_a \\ \text{неопр.} & x_a < |x| < x_b \end{cases}$$

4. Климат с неограниченными x-кадами

2-го порядка, реле



$$y_N = \begin{cases} +y_0, & \leftarrow x \rightarrow x \quad -x_a < x < \infty \\ \text{---} & \dot{x} < 0 \\ -y_0, & \quad \quad \quad -\infty < x < x_a \\ \text{---} & \dot{x} > 0 \end{cases}$$





- 2) Дискретная передаточная функция. Пример вычисления дискретной передаточной функции апериодического звена. Общее выражение и свойства для ДПФ. Статические системы, системы с астатизмом, реализуемость. Связь с импульсной переходной функцией, последовательное соединение подсистем

Наряду с разностным уравнением для описания динамических свойств дискретной системы используется передаточная функция. Передаточной функцией  $H(z)$  дискретной системы называется отношение  $z$ -изображения выходной последовательности  $y(n)$  к  $z$ -изображению входной последовательности  $x(n)$  при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Передаточную функцию можно получить, применив  $z$ -преобразование к разностному уравнению. При этом учитывают свойства  $z$ -преобразования.

### Статические системы

Если объект управления является статическим, коэффициент усиления импульсной системы можно определить, воспользовавшись теоремой о конечном значении

$$K = \frac{y(k \rightarrow \infty)}{u(k \rightarrow \infty)} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1 + \dots + a_m}. \quad (3.4-15)$$

### Системы с астатизмом

Если в объекте управления содержится «чистый» интеграл, импульсная передаточная функция системы имеет полюс при  $z=1$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1' z^{-1} + \dots + a_m' z^{-(m-1)}}. \quad (3.4-16)$$

«Установившаяся» скорость изменения выходного сигнала такой системы при подаче на ее вход ступенчатого сигнала  $u_0$  равна

$$\Delta y(k) = y(k) - y(k-1) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1' + \dots + a_m'} u_0. \quad (3.4-17)$$

Если  $b_0 \neq 0$ , выход объекта претерпевает скачок при  $k=0$ . Однако для большинства реальных систем коэффициент  $b_0$  равен нулю, поскольку при синхронной работе квантователей скачки невозможны хотя бы в силу инерционности исполнительных устройств и датчиков.

## Реализуемость

### Реализуемость

Условия реализуемости формулируются по-разному, в зависимости от того, как записана дискретная передаточная функция — в виде функции переменной  $z$  или обратной ей переменной  $z^{-1}$ .

$$а) G(z^{-1}) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}.$$

Данная передаточная функция и соответствующее ей разностное уравнение реализуемы, если бесконечный ряд

$$G(z^{-1}) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots,$$

полученный путем деления полинома числителя на полином знаменателя (ср. с уравнением (3.4-7)), не содержит членов со степенями  $z^1, z^2, \dots$ , поскольку реакция импульсной системы должна подчиняться принципу причинности. Отсюда имеем следующие условия реализуемости:

$$1) \text{ если } b_0 \neq 0, \text{ то } a_0 \neq 0;$$
$$\text{если } b_1 \neq 0, \text{ то } a_1 \neq 0;$$

⋮

$$2) m \leq n$$

$$б) G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b'_0 + b'_1 z + \dots + b'_m z^m}{a'_0 + a'_1 z + \dots + a'_n z^n}.$$

(3.4-20)

Эта передаточная функция реализуема, если в соответствующем разностном уравнении

$$a'_0 u(k) + \dots + a'_n u(k+n) = b'_0 u(k) + \dots + b'_m u(k+m)$$

выходной сигнал  $u(k+n)$  не зависит от более поздних значений выходного сигнала  $u(k+m)$ , что нарушало бы принцип причинности. Таким образом, для второй формы записи передаточной функции  $G(z)$  условием реализуемости является выполнение неравенства

$$m \leq n. \quad (3.4-21)$$

При этом предполагается, что  $a'_n \neq 0$ .

### Связь с импульсной переходной функцией

Импульсную переходную функцию можно определить по разностному уравнению (см. (3.4-13)), положив

$$u(0) = 1,$$
$$u(k) = 0 \text{ для всех } k > 0.$$

Согласно уравнению (3.4-1), это означает, что на вход системы подан единичный импульс.

Подставив указанные величины в разностное уравнение, записанное в форме

$$y(k) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n),$$

получим последовательность значений импульсной переходной функции:

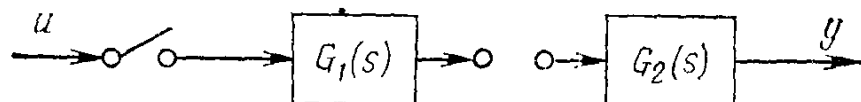
$$\left. \begin{aligned} g(0) &= b_0, \\ g(1) &= b_1 - a_1 g(0), \\ g(2) &= b_2 - a_1 g(1) - a_2 g(0), \\ &\vdots \\ g(k) &= b_k - a_1 g(k-1) - \dots - a_k g(0) \text{ при } k \leq m, \\ g(k) &= -a_1 g(k-1) - \dots - a_m g(k-m) \text{ при } k > m. \end{aligned} \right\} (3.4-22)$$

### Последовательное соединение подсистем

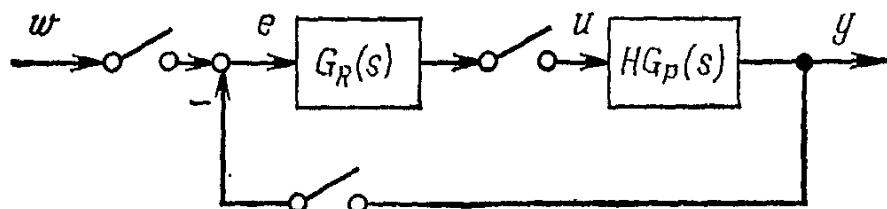
При вычислении дискретной передаточной функции для совокупности линейных подсистем, соединенных последовательно, сначала следует объединить подсистемы, между которыми нет квантовате-



$$a) y(z) = u(z) \mathcal{Z}\{G_1(s) G_2(s)\} = u(z) \cdot G_1 G_2(z)$$



$$b) y(z) = u(z) \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \mathcal{Z}\{G_2(s)\} = u(z) \cdot G_1(z) \cdot G_2(z) \neq u(z) \cdot G_1 G_2(z)$$



$$в) y(z) = HG_p(z) \cdot G_R(z) \cdot [w(z) - y(z)]$$

Рис. 3.4.3. Вычисление дискретной передаточной функции для ряда последовательно соединенных подсистем.

лей, и получить их передаточные функции. Далее эти передаточные функции перемножаются. Указанное правило поясняется примерами, представленными на рис. 3.4.3. Заметим, что в результирующих выражениях каждому квантователю <sup>1)</sup> соответствует один знак умножения.

## Билет №7

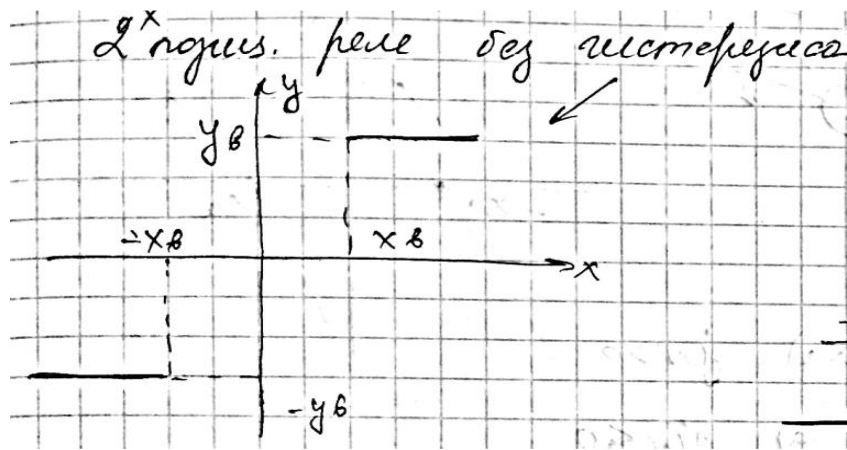
1) *Нелинейные элементы с однозначными разрывными характеристиками: двухпозиционное реле без гистерезиса, трехпозиционное реле без гистерезиса, идеальное двухпозиционное реле.*

Это доопределенное реле. Не идеальное двухпозиционное реле не является неразрывным.

Есть область (ноль) – она не определена.

На выходе нет ни первого, ни второго значения, то есть 3 состояние.

Ответ



Но существуют и такие реле, у которых средний контакт не имеет нейтрального положения. Он может только перескакивать из одного крайнего положения в другое (рис. 136, а). Статическая характеристика такого реле показана на рис. 136, б. При

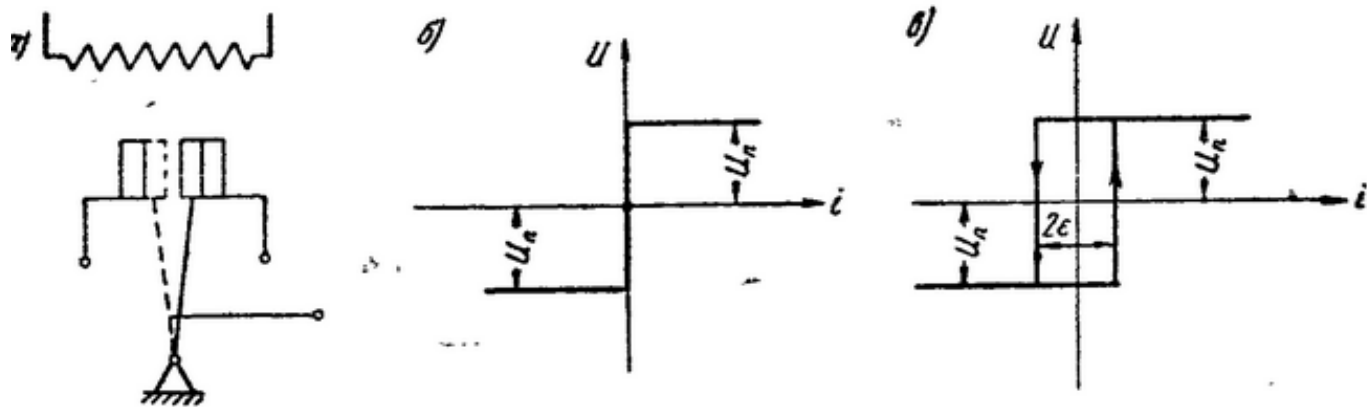
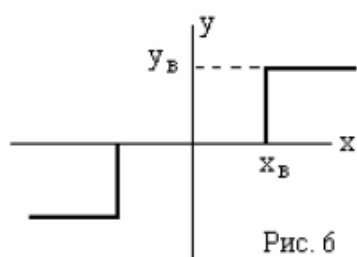


Рис. 136. Характеристика двухпозиционного реле: а) схема; б) характеристика без гистерезиса; в) характеристика с гистерезисом

учете гистерезиса статическая характеристика будет иметь вид, показанный на рис. 136, в.

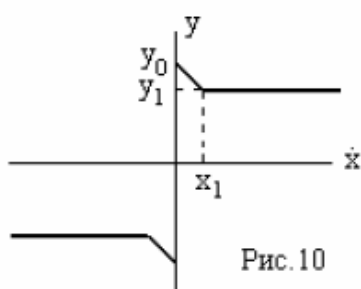
Все рассмотренные статические характеристики существенно нелинейны, так как их нельзя заменить прямыми линиями даже при самом малом отклонении координат. Релейные регуляторы, имеющие статическую характеристику типа рис. 135, б, в, называют трехпозиционными, а типа рис. 136, б, в — двухпозиционными. Двухпозиционное регулирование называют также регулированием по принципу «включено-выключено».

### 4.3 Звено типа “трехпозиционное реле без гистерезиса”



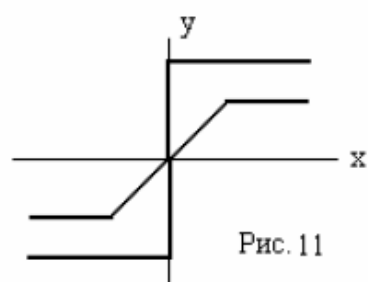
Идеальное двухпозиционное реле

Характеристика звена типа “трехпозиционное реле без гистерезиса” показана на рис.6. Эта характеристика может быть получена в результате охвата звена с характеристикой, показанной на рис.5, положительной обратной связью (путем установки переключки 5 нелинейного блока).



ординат характеристик, показанных на рис.11.

Как правило, при моделировании сухое трение воспроизводится в соответствии с формулой  $Y = Y_0 \cdot \text{sign } \dot{x}$ , для чего используется усилитель в ключевом режиме. Однако более детальная характеристика сухого трения имеет падающий участок, который в первом приближении можно аппроксимировать отрезком прямой (рис.10). Такую характеристику можно получить, например, при вычитании



Известно, что вычитанию ординат характеристик соответствует параллельное соединение нелинейностей, причем выходные сигналы нелинейностей следует подавать на входы сумматора с противоположными знаками.

2) Полюса передаточной функции. Анализ устойчивости. Расположение действительных полюсов на плоскости  $Z$  и порождаемые ими переходные процессы.  $W$ -преобразование и алгебраический критерий устойчивости

### 3.5. ПОЛЮСА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

#### 3.5.1. Расположение полюсов на плоскости $z$

*Действительные полюса*

В примере 3.4.1 было показано, что апериодическому звену с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K'}{a+s}, \quad (3.5-1)$$

на входе которого нет экстраполятора, соответствует дискретная передаточная функция

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{K'(z)}{z-z_1} = \frac{K'}{1-a_1z^{-1}} \quad (3.5-2)$$

с полюсом в точке

$$z_1 = a_1 = e^{-aT_0}. \quad (3.5-3)$$

Разностное уравнение, описывающее эту систему, имеет вид

$$y(k) - a_1y(k-1) = K'u(k). \quad (3.5-4)$$

Полагая, что сигнал на входе системы отсутствует, т. е.  $u(k) = 0, k \geq 0$ , и начальное значение выхода равно  $y(0) \neq 0$ , приходим к однородному разностному уравнению

$$y(k) - a_1y(k-1) = 0. \quad (3.5-5)$$

Отсюда можно получить следующую последовательность выходных сигналов:

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1y(0), \\ y(2) &= a_1y(1) = a_1^2y(0), \\ &\vdots \\ y(k) &= a_1^ky(0). \end{aligned} \quad (3.5-6)$$

Переходный процесс в системе сходится к нулю, а сама система, следовательно, асимптотически устойчива только при условии  $|a_1| < 1$ . Вид переходных процессов для различных положений полюса  $a_1$  на плоскости  $z$  иллюстрируется рис. 3.5.1. Заметим, что при

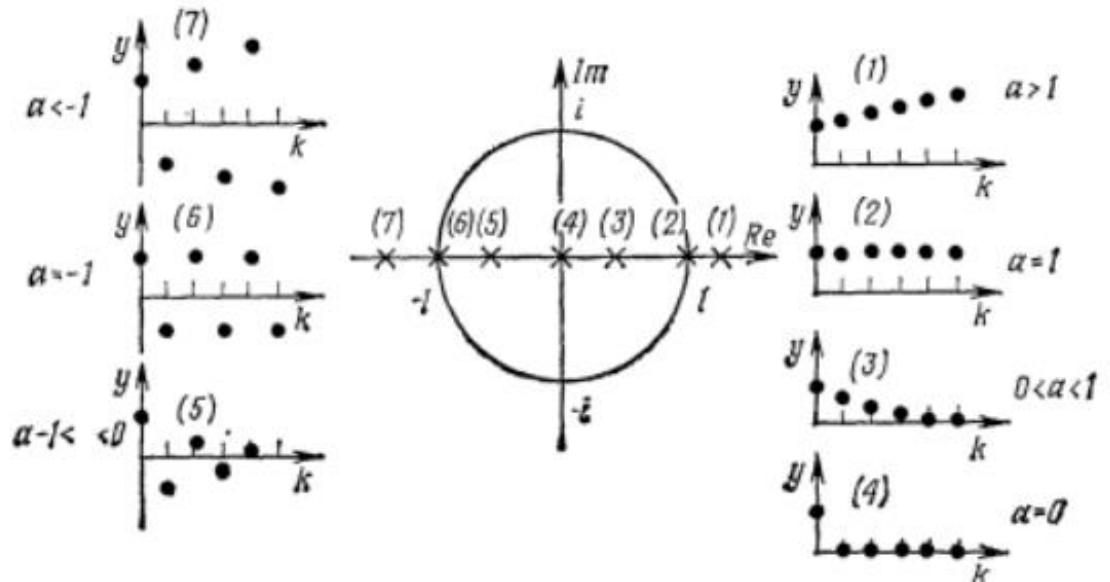


Рис. 3.5.1. Переходные процессы в системе с одним действительным полюсом.

отрицательных значениях  $a_1$  наблюдаются колебания.

Полюса передаточных функций системы по  $s$  и по  $z$  связаны соотношением

$$z_1 = a_1 = e^{-aT_0}.$$

Отсюда следует, что полюсам на плоскости  $s$ , расположенным в области  $-\infty < a < +\infty$ , на плоскости  $z$  соответствуют полюса  $\infty >$

$> z_1 > 0$ . Таким образом, на плоскости  $s$  отсутствует действительный полюс, соответствующий отрицательному значению  $z_1$ .

*Комплексно-сопряженные полюса*

Система второго порядка с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2DTs + 1} = \frac{K(a^2 + \omega_1^2)}{(s+a)^2 + \omega_1^2} = \frac{K(a^2 + \omega_1^2)}{(s-s_1)(s-s_2)},$$

где  $a = D/T$ ,  $\omega_1^2 = 1/T^2(1 - D^2)$ ,  $s_{1,2} = -a \pm i\omega_1$ , без экстраполятора нулевого порядка при входе обладает дискретной передаточной

функцией

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\left( \alpha K \frac{a^2 + \omega_1^2}{\omega_1} \sin \omega_1 T_0 \right) z}{z^2 - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) z + \alpha^2} = \frac{b_1}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Здесь  $\alpha = e^{-aT_0}$ .

Полюса этой дискретной передаточной функции равны

$$z_{1,2} = \alpha [\cos \omega_1 T_0 \pm i \sin \omega_1 T_0] = \alpha e^{\pm i\omega_1 T_0}, \quad (3.5-7)$$

а соответствующее ей разностное уравнение имеет вид

$$y(k) - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) y(k-1) + \alpha^2 y(k-2) = 0.$$

Запишем решение этого уравнения при начальных условиях  $y(0) = 0$  и  $y(1) = \alpha \cos \omega_1 T_0$ :

$$y(k) = \alpha^k \cos \omega_1 k T_0 \cdot y(0). \quad (3.5-8)$$

Графики изменения  $y(k)$  для положительных значений  $\alpha$  изображены на рис. 3.5.2. При отрицательных  $\alpha$  переходные процессы носят колебательный характер. Следует, однако, иметь в виду, что на плоскости  $s$  соответствующие этим значениям полюса не существуют.



Здесь  $\alpha = e^{-aT_0}$ .

Полюса этой дискретной передаточной функции равны

$$z_{1,2} = \alpha [\cos \omega_1 T_0 \pm i \sin \omega_1 T_0] = \alpha e^{\pm i \omega_1 T_0}, \quad (3.5-7)$$

а соответствующее ей разностное уравнение имеет вид

$$y(k) - (2\alpha \cos \omega_1 T_0) y(k-1) + \alpha^2 y(k-2) = 0.$$

Запишем решение этого уравнения при начальных условиях  $y(0) = 0$  и  $y(1) = \alpha \cos \omega_1 T_0$ :

$$y(k) = \alpha^k \cos \omega_1 k T_0 \cdot y(0). \quad (3.5-8)$$

Графики изменения  $y(k)$  для положительных значений  $\alpha$  изображены на рис. 3.5.2. При отрицательных  $\alpha$  переходные процессы носят колебательный характер. Следует, однако, иметь в виду, что на плоскости  $z$  соответствующие этим значениям полюса не существуют.

### 3.5.2. Условие асимптотической устойчивости

Линейная система именуется асимптотически устойчивой, если после конечного однократного воздействия она возвращается к своему положению равновесия. Проведенный выше анализ влияния расположения полюсов на переходные процессы показал, что данное условие соблюдается только в том случае, когда полюса находятся внутри единичного круга на плоскости  $z$ . Иными словами, корни характеристического уравнения

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m) = 0 \quad (3.5-9)$$

должны удовлетворять неравенству

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5-10)$$



### 3.5.3. Билинейное преобразование и критерии устойчивости

Билинейное преобразование

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (3.5-11)$$

переводит точки единичной окружности на плоскости  $z$  в точки, лежащие на мнимой оси плоскости  $w$ , а внутренность круга переходит в левую полуплоскость  $w$ . Поскольку плоскость  $w$  в теории дискретных систем служит аналогом плоскости  $s$  для непрерывных систем, в ней можно применять критерии устойчивости Рауса или Гурвица.

С этой целью произведем подстановку

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (3.5-12)$$

в знаменатель

$$A(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m \quad (3.5-13)$$

передаточной функции

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.5-14)$$

В результате имеем

$$\bar{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^m + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{m-1} + \dots + a_m, \quad (3.5-15)$$

а после умножения на  $(1-w)^m$  — полином

$$\bar{A}(w) = (1+w)^m + a_1 (1+w)^{m-1} (1-w) + \dots + a_m (1-w)^m. \quad (3.5-16)$$

Применим критерий Гурвица к уравнению

$$\bar{A}(w) = 0. \quad (3.5-17)$$

Как видим, уравнение нелинейного звена (9.12) с точностью до высших гармоник является квазилинейным. При постоянных значениях амплитуды входного сигнала  $A$  коэффициенты гармонической линейризации  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  являются постоянными. Однако различным значениям амплитуды  $A$  соответствуют разные коэффициенты  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$ . В этом заключается отличие гармонической линейризации от обычной (см. разд. 8).

Таким образом, вместо нелинейного элемента с характеристикой (9.6) можно рассматривать эквивалентное линейное звено, поведение которого описывается уравнением (9.12). Оно может быть представлено в операторной форме

$$u = \left[ q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \right] \Delta. \quad (9.13)$$

Для гармонически линейризованного нелинейного элемента можно записать передаточную функцию

$$W_{\text{нэ}}(p, A, \omega) = \frac{u}{\Delta} = q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \quad (9.14)$$

и получить из нее выражение для частотной характеристики

$$W_{\text{нэ}}(A, j\omega) = q_1(A, \omega) + jq_2(A, \omega). \quad (9.15)$$

В случае статической нелинейной характеристики вместо (9.6) имеем

$$u = f(\Delta)$$

и уравнение (9.13) принимает вид [1]

$$u = \left[ q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega} p \right] \Delta, \quad (9.16)$$

где коэффициенты гармонической линейризации  $q_1(A)$  и  $q_2(A)$  зависят только от амплитуды. При этом получим передаточную функцию

$$W_{\text{нэ}}(p, A, \omega) = q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega} p \quad (9.17)$$

и частотную характеристику

$$W_{\text{нэ}}(A, j\omega) = q_1(A) + jq_2(A) \quad (9.18)$$

статического нелинейного звена.

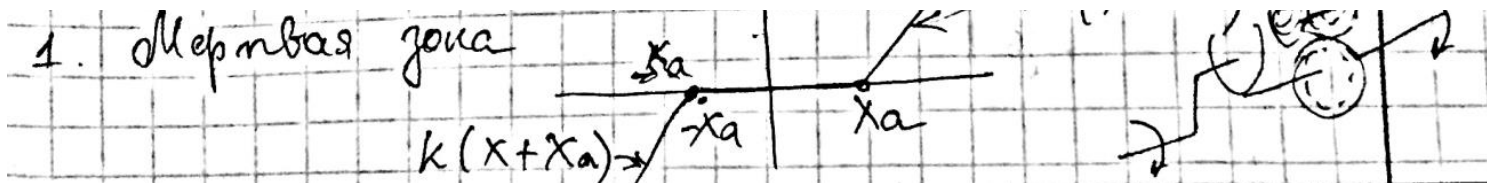
Для однозначной статической нелинейной характеристики коэффициент  $q_2(A) = 0$ , и вместо (9.15) получим

$$W_{\text{нэ}}(A, j\omega) = q_1(A). \quad (9.19)$$

Коэффициенты гармонической линейризации типовых статических нелинейных звеньев приводятся в литературе (например, в [1, 10]).

# Билет №7

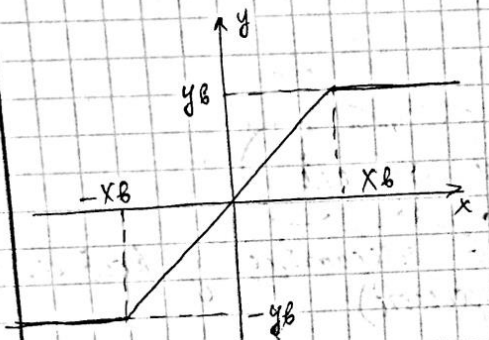
1) Типовые нелинейные элементы. Нелинейные элементы с однозначными непрерывными характеристиками. Мертвая зона насыщения, насыщение с мертвой зоной. Основной (обобщенный) класс нелинейности, принадлежности линейной функции секторам.



$$y_N = \begin{cases} 0, & |x| \leq x_a \\ k(x - x_a), & x > x_a \\ k(x + x_a), & x < -x_a \end{cases}$$

$\frac{x_a}{x_a} = \mu$   
(где нормализация)

## 2. Насыщение



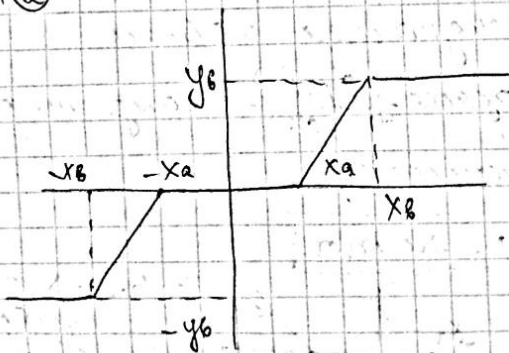
$$y_N = \begin{cases} kx_b & |x| \leq x_b \\ y_b \cdot \text{sign } x; & |x| > x_b \\ \text{здесь шлеп} \end{cases}$$

$$\frac{x_b}{x_b} = \mu; \quad \frac{y_b}{kx_b} = \eta$$

$$\eta = \begin{cases} \mu & |\mu| \leq 1 \\ \text{sign } \mu & |\mu| > 1 \end{cases}$$

нормализованная x-ко

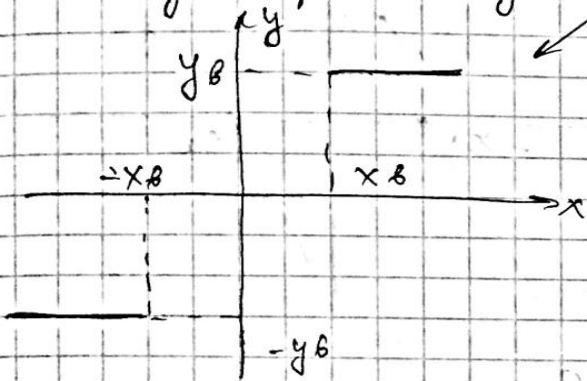
①+②=



$$\begin{cases} 0 \\ \mu - 1 \\ \mu + 1 \\ (\mu - 1) \text{sign } \mu \end{cases}$$

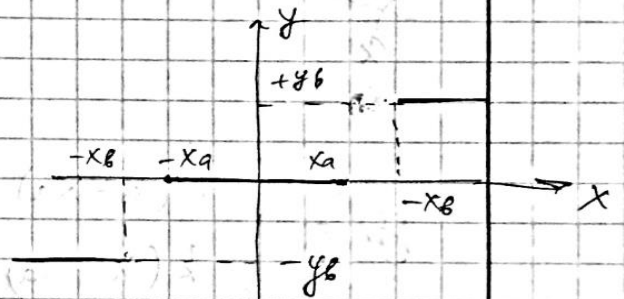
3. Классы зп-тов с одинаковой разрывной х-каси

2<sup>х</sup> разрыв. реле без истерезиса



$$y_{\text{н}} = \begin{cases} y_B \operatorname{sign} x & ; |x| \geq x_B \\ \text{неопр} & |x| < x_B \end{cases}$$

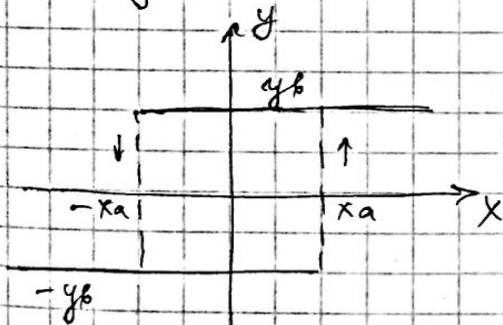
3х разрыв. реле б/истер



$$y_{\text{н}} = \begin{cases} y_B \operatorname{sign} x & ; |x| \geq x_B \\ 0 & ; |x| < x_A \\ \text{неопр.} & x_A < |x| < x_B \end{cases}$$

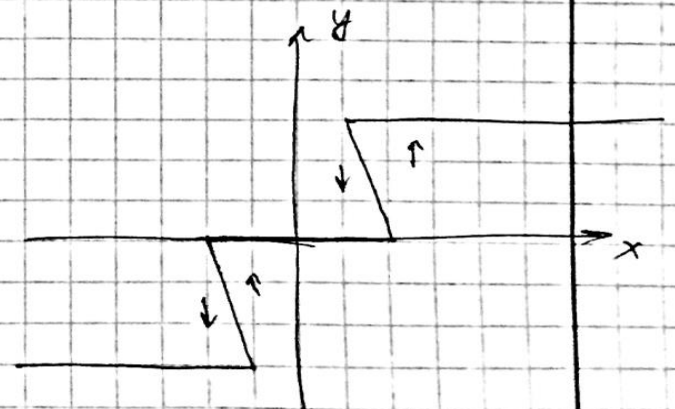
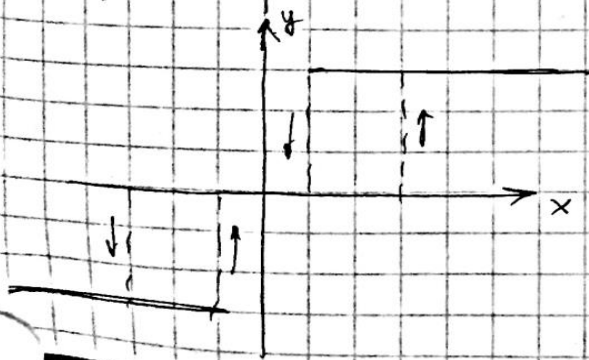
4. Класс с неоднородными x-каси

2<sup>х</sup> разрыв. реле



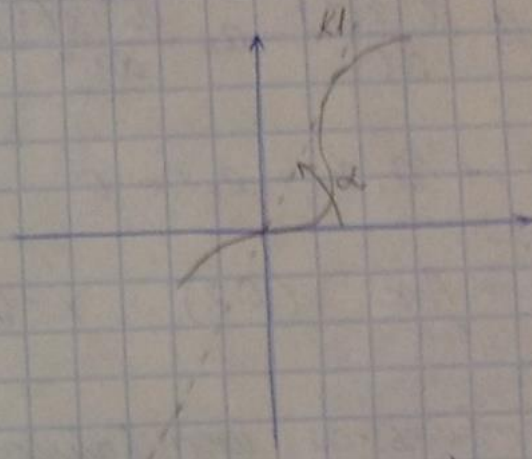
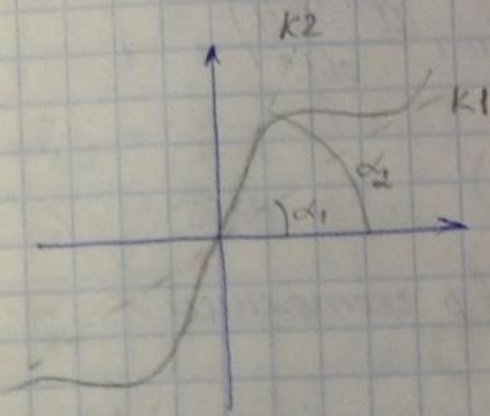
$$y_{\text{н}} = \begin{cases} +y_B, & \leftarrow x \leftarrow x \quad -x_A < x < \infty \\ -y_B, & \quad \quad \quad -\infty < x < x_A \end{cases}$$

$\begin{matrix} \dot{x} < 0 \\ \dot{x} > 0 \end{matrix}$



04.10.2014г.

Обобщенный класс НЛ



$$y_N = F(x); [k_1, k_2]$$

$$(kx - y_N) y_N \geq 0.$$

$$k_1 \leq \frac{y_N}{x} = \frac{F(x)}{x} \leq k_2 \quad (x \neq 0)$$

$y_N = 0; x = 0$  - из начала координат

$$(k_2 x - y_N) (y_N - k_1 x) \geq 0$$

$$k \rightarrow \infty \quad \perp$$

$$0 \leq \frac{F(x)}{x}; \quad x \cdot F(x) \geq 0$$



### 3.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Важнейшую роль в современной теории систем управления, в особенности при проектировании многомерных систем, играет метод пространства состояний. Переход к описанию в пространстве состояний может осуществляться различными способами. Ниже демонстрируются два из них. Первый заключается в прямой подстановке новых переменных в разностное уравнение, основу второго составляет аналитическое решение дифференциального уравнения, описывающего линейную систему с экстраполятором нулевого порядка.

*Запись разностного уравнения в векторной форме (метод прямого программирования)*

После подстановки в разностное уравнение (3.4-13) индексов,  $y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$ , (3.4-13)

изменяющихся от  $k$  до  $k+n$ , получим

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k). \quad (3.6-1)$$

Соответствующая дискретная передаточная функция имеет вид

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3.6-2)$$

Введем следующие переменные состояния:

$$y(k) = x_1(k) \quad (3.6-3)$$

$$\left. \begin{aligned} y(k+1) &= x_2(k) = x_1(k+1) \\ y(k+2) &= x_3(k) = x_2(k+1) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y(k+n-1) &= x_n(k) = x_{n-1}(k+1) \\ x(k+n) &= x_n(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (3.6-4)$$



Подставим выражения (3.6-4) в уравнение (3.6-1), положив  $b_n = 1$ , а  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} = 0$ :

$$y(k+n) = x_n(k+1) = -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k) + 1u(k). \quad (3.6-5)$$

Это соотношение можно представить в форме векторного разностного уравнения

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.6-6)$$

и уравнения выхода

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \quad (3.6-7)$$

Обозначим вектор переменных состояния  $\mathbf{x}$ , матрицу системы  $\mathbf{A}$ , вектор передачи управления  $\mathbf{b}$  и вектор наблюдения  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \quad (3.6-8)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k). \quad (3.6-9)$$

Если  $b_n = 1$ , а  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} = 0$ , то уравнения (3.6-2) и (3.6-3) можно представить в форме

$$y(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} u(z) = x_1(z). \quad (3.6-10)$$

Если же  $b_n \neq 1$  и  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \neq 0$ , уравнения (3.6-2) и (3.6-3) приводятся к виду

$$y(z) = b_n x_1(z) + b_{n-1} z x_1(z) + \dots + b_0 z^n x_1(z)$$

или

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_1(k+1) + \dots + b_0 x_1(k+n). \quad (3.6-11)$$

Кроме того, используя уравнение (3.6-4), можно получить выражение

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_2(k) + \dots + b_1 x_n(k) + b_0 x_n(k+1). \quad (3.6-12)$$

Определив  $x_n(k+1)$  из соотношения (3.6-5), получаем окончательный результат

$$y(k) = (b_n - b_0 a_n) x_1(k) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x_2(k) + \dots + (b_1 - b_0 a_1) x_n(k) + b_0 u(k). \quad (3.6-13)$$

Это обобщенное уравнение выхода можно также записать в векторной форме:

$$y(k) = [(b_n - b_0 a_n) \dots (b_1 - b_0 a_1)] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

или

$$y(k) = c^T x(k) + d u(k). \quad (3.6-14)$$

При  $b_0 = 0$ , т. е. для систем без прямой передачи управляющего воздействия, уравнение (3.6-14) приобретает вид

$$y(k) = [b_n \dots b_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \quad (3.6-15)$$

Структурная схема, соответствующая разностному уравнению, полученному исходя из соотношений (3.6-4), (3.6-5) и (3.6-12) и

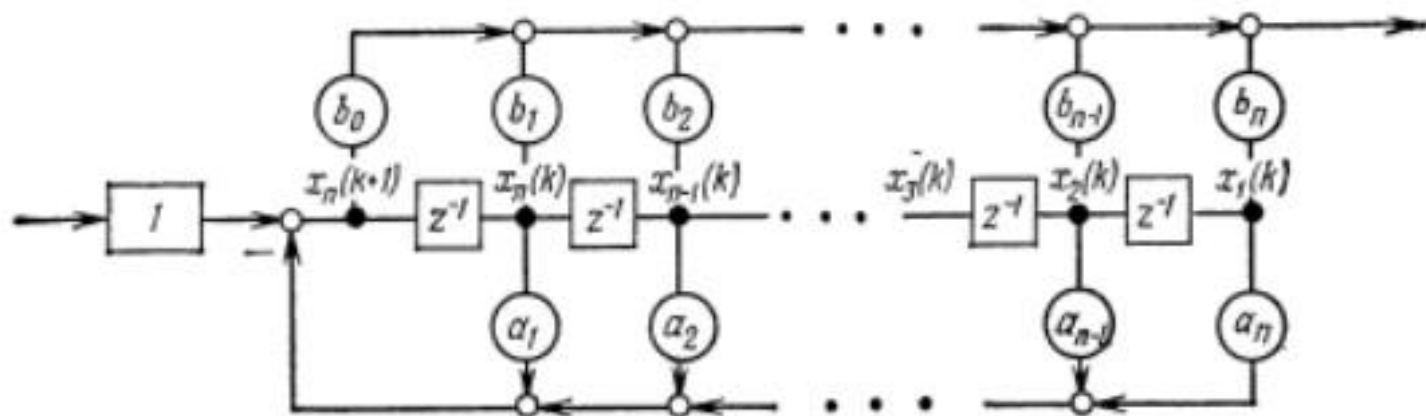


Рис. 3.6.1. Структурная схема разностного управления, записанного в пространстве состояний (нормальная форма).

записанному в пространстве состояний, представлена на рис. 3.6.1 в нормальной форме. Предполагается, что векторное разностное уравнение и уравнение выхода имеют вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \quad (3.6-16)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k). \quad (3.6-17)$$

Данным уравнениям соответствует блок-схема, показанная на рис. 3.6.2.

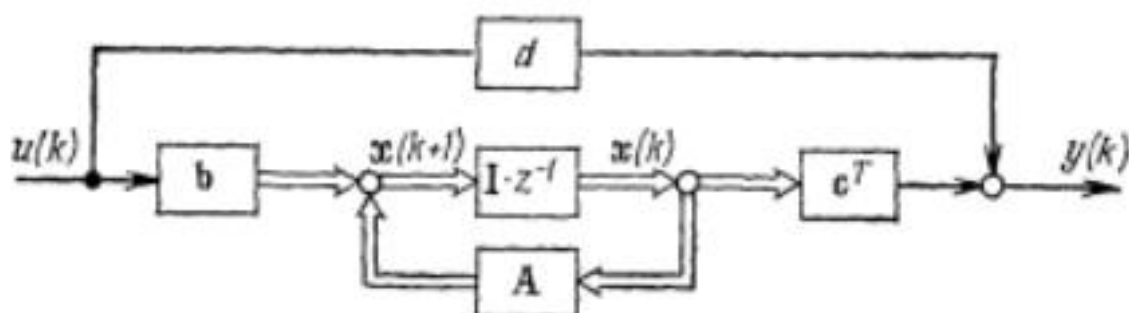
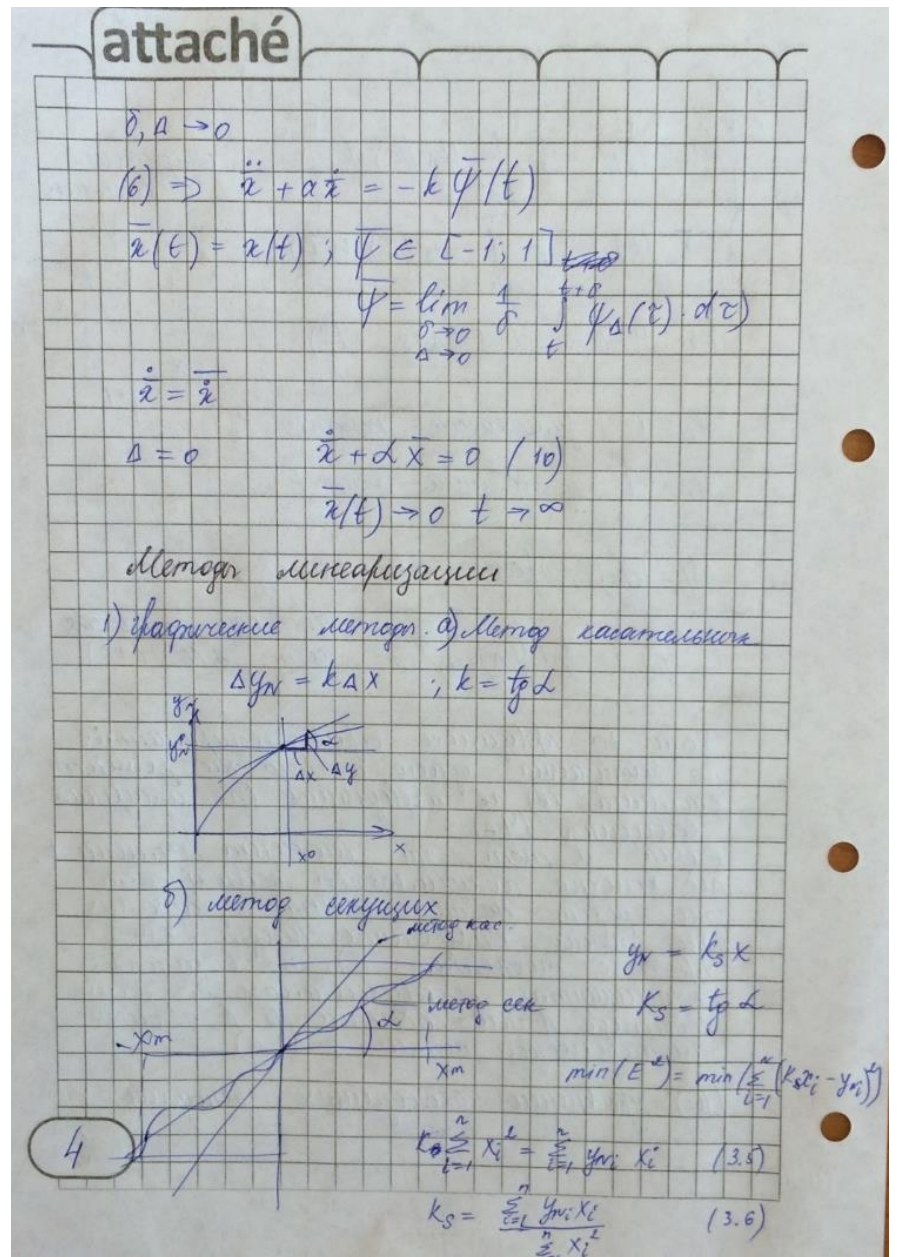


Рис. 3.6.2. Блок-схема системы, описываемой векторным разностным уравнением первого порядка.

## Билет №8

1) Методы линеаризации. Графические методы: метод касательных, метод секущих. Алгебраические методы: замена функций линейной аппроксимацией. Аналитическая линеаризация в окрестности рабочей точки. Вычисление коэффициентов линеаризации методом наименьших квадратов.



Необходимо спрямить участок нашей кривой, представляющая какую—то характеристику системы в окрестности рабочей точки. На картинке 1А мы выбрали некоторую рабочую точку  $X_0$  и хотим использовать в окрестности этой точки  $X_0$  упрощенную зависимость нашей величины. В данном случае метод касательных предлагает просто провести касательную под наиболее удобным углом, которая как то так (как на рисунке) себя ведет. Дельта  $X$  это рабочий интервал.

Метод секущих – проводим прямую между двумя точками исходной кривой.

Делается либо от балды, либо алгебраически так, чтобы сумма площадей (между кривой и прямой) была минимальна (т.е. это ошибки линеаризации). Для этого используется метод наименьших квадратов. Он гарантирует минимум квадратичной ошибки. Квадратичная ошибка это расстояние между наиболее далекой точкой от прямой до этой прямой. В данном случае (рис 1Б) употребляет сумму этих отклонений.

Необходимо обеспечить разрешимость системы уравнений ( $\min(E^2)$ ). Эту систему уравнений решаем, чтобы определить нашу кривую, значит степень свободы у нашей кривой должно быть равно столько, сколько  $X_i$ . Решением системы является  $K_s$ .

2. Аппроксимация экспоненциальной

$\frac{1}{1+\Delta x} \approx 1 - \Delta x$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1+\Delta x}} \approx 1 - \frac{1}{3}\Delta x$
$(1+\Delta x)^2 \approx 1 + 2\Delta x$	$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$
$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$	$a^{\Delta x} \approx 1 + (\ln a)\Delta x$
$\sqrt[3]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{3}\Delta x$	$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x$

$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$   
 $y(t) = h(t, x(t), u(t))$   
 $u(t) = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$   
 $y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_r]^T$

$f(t, x, u) = \begin{cases} f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ f_2(\dots) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases}$

$h(t, x, u) = \begin{cases} h_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ h_2 \dots \dots \\ \vdots \\ h_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases}$

5

X с точкой это изменение состояния. U это выход системы. Вместе

эти два уравнения это система нелинейных уравнений. Уравнения нашей системы. X – это состояние, U – это управление. Функция f возвращает n значений, где каждое значение рассчитывается на основании вектора состояния, вектора управления и времени.

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, u) = f(x_e, u_e) + D_1 f(x_e, u_e) [u(t) - u_e] + D_2 f(x_e, u_e) [u(t) - u_e] + r[x(t), u(t)]$$

$$Y_x = D_1 f(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad n \times n$$

$$Y_u = D_2 f(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad n \times m$$

Вместо X с точкой написали dx/dt, а правую часть разложили в ряд тейлора, где D1, D2 и тд это матричные коэффициенты разложения, т.к. функции векторные. Yx – это якобиант, который равен нашему коэффициенту D1 на f. Yx – якобиан по состоянию, он показывает динамику состояния функции f. Yu – якобиан по управлению, показывает динамику решения в зависимости от управления.



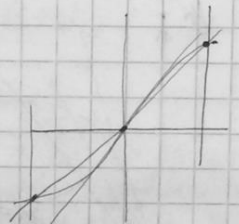
Метод наименьших квадратов (линеаризация) 18.10.14.  
 по в. обеспечить мин. ошибку

$$y_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.21) - \text{нелинейная ф-ция}$$

$$y_n^0 = f^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \text{точка линеаризации} \quad (3.22)$$

мат.  $x_i$   $m > n$

$$y_{nk} = F(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}), \quad k = \overline{1, m} \quad (3.23)$$

$$k = \overline{1, m} \begin{cases} x_{1k} - x_1^0 = \Delta x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} - x_n^0 = \Delta x_{nk} \end{cases} \quad (3.24)$$


$$y_{nk} - y_n^0 = \Delta y_{nk}, \quad k = \overline{1, m} \quad (3.25)$$

$$\Delta y_n \approx \sum_{i=1}^n K_i \Delta x_i = K_1 \Delta x_1 + \dots + K_n \Delta x_n \quad (3.26)$$

$E$  - ошибка для данного набора точек

$$E = \sum_{k=1}^m (K_1 \Delta x_{1k} + \dots + K_n \Delta x_{nk} - \Delta y_{nk})^2 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial E}{\partial K_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.28); \quad \frac{\partial E}{\partial K_i} = \sum_{k=1}^m 2(K_1 \Delta x_{1k} + K_2 \Delta x_{2k} + \dots + K_n \Delta x_{nk} - \Delta y_{nk}) \Delta x_{ik} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.29)$$

$$K_1 \sum_{k=1}^m \Delta x_{1k} \Delta x_{ik} + K_2 \sum_{k=1}^m \Delta x_{2k} \Delta x_{ik} + \dots + K_n \sum_{k=1}^m \Delta x_{nk} \Delta x_{ik} = \sum_{k=1}^m \Delta y_{nk} \Delta x_{ik}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.30)$$

Есть какая то нелинейная функция  $y_n$  которую мы пытаемся заменить линейной и некоторая точка линеаризации  $y_n^0$ , которая представляет собой рабочую точку. Мы не можем точно линеаризовать функцию везде. Мы можем это сделать в какой-то окрестности какой-то точки и хотелось бы это сделать в окрестности той точки, в окрестности которой чаще всего находимся. Это наиболее оптимально и рационально. У нас дана такая точка, которая задана вектором координат.  $y_{nk}$  - сформированная нами система уравнений. У нас есть  $K$  нелинейных уравнений для каждого из комплекта координат. Тогда можно записать  $K$  ошибок.  $x_{12}$  это аргумент,  $x_{10}$  - это наша точка линеаризации, дельта  $x$  это окрестность, по которой мы ходим около этой точки. Аналогично у нас может быть  $K$  ошибок по линеаризованной функции  $y$ . Тогда суммарное отклонением дельта  $y$  будет скалярным произведением этих величин.  $K_i$  на дельта  $x$ . Это будет расхождение.

Дальше записываем квадрат ошибки. Дальше исследуем эту функцию на минимум. Необходимым условием является равенство нулю всех частных производных по всем переменным. 3.28 это наше условие. 3.29 применяем условие 3.28 для наших уравнений. У размерность  $m$ , поэтому у нас  $m$  уравнений. Далее решаем систему уравнений и получаем 3.32 тангенс угла наклона кривой.

Далее идет график, представлены варианты его линеаризации. Справа от графика написаны уравнения этих величин. 3.36 коэффициенты усиления.

Следующий график (ступенька) это пример линеаризации такого сигнала разными методами. Вот есть нелинейное выражение  $y_n = ax + bx^3$ . Коэффициент 3.32 можем получить так же, как и раньше, пройдя все этапы.



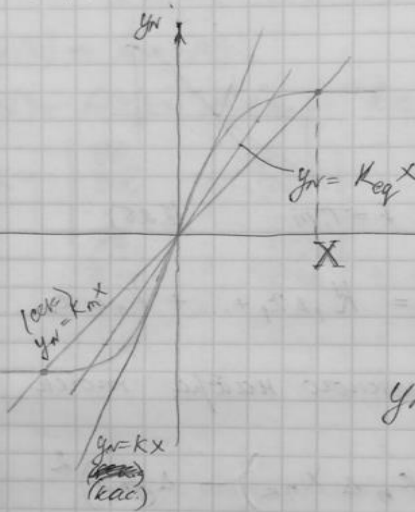
$k = k_i$  ( $k$ -я в.  $n$ -м усилении)

$$\Delta y_N \approx K \Delta x \quad (3.31)$$

$$K = \frac{\sum_{k=1}^m \Delta y_{Nk} \Delta X_k}{\sum_{k=1}^m (\Delta X_k)^2}, \quad m > 1 \quad (3.32)$$

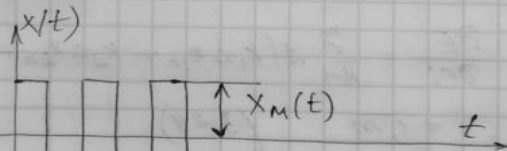
$$y_N = k_m x; \quad k_m = \frac{F(x)}{x} \quad (3.35)$$

$$k_m < k_{eq} < K \quad (3.36)$$



$$y_N = k_{eq} x$$

$$y_N = a x + b x^3$$



$$y_N = F(x)$$

$$k_{eq} = \frac{F(x_m)}{x_m} = a + b x_m^2 \quad (3.38)$$

$$y = k_{eq} x = (a + b x_m^2) x$$

Для квадратичных нелинейных функций в.  $n$ -м усилении  $k_{eq}$  не зависит от частоты

$$x(t) = x_m \sin(\omega t) \quad (3.40)$$

$$y_N = F(x) = a x + b x^3$$

Если  $y = F(x)$  - нелинейная  $\rightarrow$  не входе синусоида

$$y = X_p \sin(\omega t) \quad (3.41)$$

$$k_{eq} = \frac{X_p}{x_m} \quad (3.42)$$

Запишем уравнение для первой гармоники преобразованного сигнала (3.40). Т.к. функция является четной - в разложении в ряд Фурье только член  $\sin$

$$y_c = X_p \sin(\omega t) \quad (3.43)$$

$$X_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_m \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (3.44)$$

$$\varphi = \omega t$$

$$k_{eq} = \frac{X_p}{x_m} = \frac{1}{\pi x_m} \int_0^{2\pi} F(x_m \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (3.45)$$

$$(a x + b x^3); \quad x(t) = x_m \sin \omega t$$

$$k_{eq} = \frac{a}{\pi x_m} \int_0^{2\pi} x_m \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{b}{\pi x_m} \int_0^{2\pi} x_m^3 \sin^4 \varphi d\varphi \quad (3.46)$$

$$k_{eq} = a + \frac{3}{4} b x_m^2 = \frac{X_p}{x_m} \quad (3.47)$$

$$y_c = X_p \sin \omega t = k_{eq} x_m \sin \omega t = a + \frac{3}{4} b x_m^2 \sin \omega t \quad (3.48)$$

гармоническая  
линейная

**Балансировка стержня.** Рассмотрим задачу стабилизации стержня в вертикальном положении ([174]).<sup>6</sup> Пусть стержень имеет длину  $l$  и вся масса сосредоточена на его верхнем конце (т.е. рассматривается обращенный математический маятник). Уравнение динамики стержня относительно угла отклонения от вертикали  $\varphi(t)$ , согласно закону Ньютона, имеет вид

$$\ddot{u}(t) \cos \varphi + l\ddot{\varphi}(t) = g \sin \varphi(t), \quad (8.11)$$

где  $g \approx 9.81$  – ускорение свободного падения;  $u(t)$  – управляющее воздействие – горизонтальное перемещение основания стержня (рис. 8.2). Кроме того, выполнено геометрическое соотношение

$$x(t) = u(t) + l \sin \varphi(t). \quad (8.12)$$

Выполняя линеаризацию относительно вертикального состояния равновесия, приведем уравнения (8.11), (8.12) относительно  $x(t)$  к виду

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l}(x(t) - u(t)).$$

Введем горизонтальную скорость перемещения  $v(t) \triangleq \dot{x}(t)$ . Отсюда получим уравнения состояния системы

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & gl^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gl^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

---

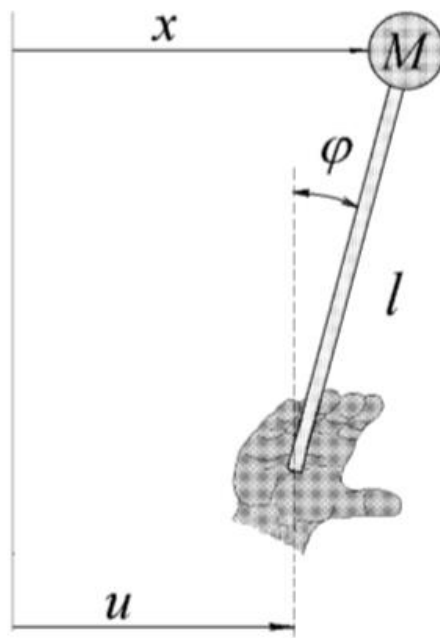


Рис. 8.2. Балансировка стержня.

Матрица управляемости равна

$$Q_y = \begin{bmatrix} -gl^{-1} & 0 \\ 0 & -gl^{-1} \end{bmatrix}.$$

Так как  $\det Q \neq 0$ , то рассматриваемая система полностью управляема и при наличии полной информации о векторе состояния может быть стабилизирована обратной связью.

Обратимся теперь к задаче оценивания состояния. Пусть измеряется только отклонение  $x(t)$  ( $u(t)$  также считается известным). Уравнение выхода тогда имеет вид  $y(t) = [0, 1]x(t)$ , где  $y(t)$  – измеряемый выход объекта. Матрица наблюдаемости

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det Q_n = -1.$$

Таким образом, рассматриваемая система является и полностью наблюдаемой (следовательно – невырожденной). Идентификатор полного порядка (8.3) для нее будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\hat{v}}(t) = (1 - l_1)\hat{x}(t) + l_1x(t) - gl^{-1}u(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) = gl^{-1}\hat{v}(t) + l_2(\hat{x}(t) - x(t)). \end{cases} \quad (8.13)$$

Здесь  $l_1, l_2$  – параметры наблюдателя, выбор которых выполняется по заданным значениям коэффициентов характеристического многочлена  $\det(s\mathbf{I} - A_n) = s^2 + l_2s + g(l_1 - 1)l^{-1}$ .

Идентификатор (8.13) использует измерения  $u(t)$ ,  $x(t)$  для получения оценок  $\hat{v}(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ . Если не ставить задачу фильтрации шумов измерений, то вторая оценка является лишней и можно уменьшить порядок алгоритма оценивания, используя наблюдатель Луенбергера (8.10).

Заметим, что в рассматриваемом примере уравнения объекта уже имеют требуемую каноническую форму (8.8) и преобразования базиса выполнять не надо, а можно сразу записать уравнения наблюдателя (8.10). В данном примере матрицы (скалярные коэффициенты)  $A_{11} = A_{22} = 0$ ,  $A_{21} = 1$ ,  $A_{12} = gl^{-1}$ ,  $B_1 = -gl^{-1}$ , поэтому (8.10) принимает вид

$$\dot{\hat{v}}(t) = -e\hat{v}(t) + (gl^{-1} - e^2)x(t) - gl^{-1}u(t).$$

Здесь  $e$  – подлежащий выбору параметр наблюдателя. Получим характеристический многочлен  $\det(s\mathbf{I} - A_n) = s + el^{-1}$ . Поэтому  $e = -s_1l$ , где  $s_1$  – требуемое значение корня характеристического многочлена наблюдателя.

1) Гармоническая линеаризация. Эквивалентная линейная система. Определение параметров колебаний на выходе эквивалентной системы. Эквивалентный коэффициент усиления. Описывающая функция и разложение в ряд Фурье.

**9.2.2. Метод гармонической линеаризации**

Под **линеаризацией** понимают приближенную замену нелинейной функции линейной таким образом, чтобы по какому-то выбранному показателю обе эти функции совпадали.



Рис. 9.4. Нелинейный элемент

В способе гармонической линеаризации нелинейный элемент (рис. 9.4) заменяется квазилинейным звеном, параметры которого определяются при синусоидальном входном сигнале

$$\Delta = A \sin(\omega t) \tag{9.5}$$

из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена.

Рассмотрим процедуру линеаризации для нелинейного элемента, уравнение которого имеет вид

$$u = f(\Delta, \dot{\Delta}) \tag{9.6}$$

При поступлении на его вход гармонического сигнала (9.5) на выходе звена в установившемся режиме также будет периодический, но несинусоидальный сигнал

$$u = f[A \sin(\omega t), A \omega \cos(\omega t)] = f(A, \omega t) \tag{9.7}$$

Разложим его в ряд Фурье [11] и получим

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega t) + c_k \cos(k\omega t)], \tag{9.8}$$

где будем полагать  $u_0 = 0$ , что справедливо для симметричной нелинейной характеристики (9.6).

С учетом (9.7) коэффициенты ряда Фурье (9.8) определяются известными соотношениями

$$\begin{cases} b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \\ c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \end{cases}$$

Используем только первые члены ряда разложения в (9.8), пренебрегая высшими гармониками, и получим

$$u \approx b_1 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t) \tag{9.9}$$

Учтем, что  $\Delta = A \sin(\omega t)$ , а  $\dot{\Delta} = A \omega \cos(\omega t)$ , следовательно,

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{\Delta}{A}, \\ \cos(\omega t) = \frac{\dot{\Delta}}{A\omega}. \end{cases} \tag{9.10}$$

После подстановки (9.10) в (9.9) получим выражение для выходного сигнала нелинейного звена



1. Описывающая функция:

$$y_N = F(x)$$

$$y_N = F(x, \dot{x})$$

$$x(t) = X_m \sin(\omega t)$$

Периодический процесс на выходе НЛ элемента может быть представлен в виде разложения в ряд Фурье

$$y_N = F[x(t)] = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_{pk} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} y_{qk} \cos k\omega t \quad (3.50)$$

$$y_{pk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_m \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t) \quad (3.51)$$

$$y_{qk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_m \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t)$$

В общем случае, они зависят как от амплитуды входного сигнала  $X_m$ , так и от частоты  $\omega$  (это для  $2 y_{pk}$ ).

Для ненагруженных элементов (без среднего сигнала и внешних возмущений)  $y_0=0$  (т.е. смещения сигналов на вх/вых нет). После гармонической линеаризации вх. сигнала  $y_N(t)$ , должны быть получены аппроксимации в виде разложения в ряд Фурье.

Т.е. верхняя сумма синусоид (нелинейный ряд Фурье 3.50 – какая то постоянная величина плюс сумма гармоник). На выходе должны получить при нулевом смещении  $y_0=0$  (3.53) – в котором учитываются только первые линейные гармоники. Далее переводим все в комплексную форму ( $\sin + \cos = e$  с какой то степенью).

$$y(t) \approx y_{p1} \sin \omega t + y_{q1} \cos \omega t \quad (3.53)$$

$$y(t) = \text{Im} \left\{ (y_{p1} + j y_{q1}) e^{j\omega t} \right\} \quad (3.54)$$

$$y_{p1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_m \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \quad (3.55)$$

$$y_{q1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_m \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) \quad (3.56)$$

Последние два уравнения это коэффициенты в 3.53 – скалярные произведения в пространстве функций нашей изображающей функции, которую линеаризуем  $F(x)$  на наш синус и на наш косинус.



2. Эквивалентный коэффициент усиления  $G_N$ : находится как отношение первых гармоник выхода ко входу. Для этого запишем:

это гармоника.

$$G_N(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m) = \frac{Y_{P1}}{X_m} + j \frac{Y_{Q1}}{X_m} =$$

$$= |G_N(X_m)| e^{j\varphi_N} \quad (3.57)$$

$$P(X_m) = Y_{P1} / X_m = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \quad (3.58)$$

$$Q(X_m) = Y_{Q1} / X_m = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) \quad (3.59)$$

Где  $Y_{P1}$  и  $Y_{Q1}$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

Коэффициент усиления это отношение выхода ко входу. А выход и вход мы приняли линейными гармониками, значит это отношение линейных гармоник. Далее посчитали, поделили одну на другую, написали чему это равно.

Выход  $y(t)$  вход  $x(t)$ . В конце переводим в экспоненциальную форму. 3.57.

$$|G_N(X_m)| = \frac{Y_{m1}}{X_m} = \frac{\sqrt{Y_{P1}^2 + Y_{Q1}^2}}{X_m} \quad (3.60)$$

$$\varphi_N = \arctg \frac{Y_{Q1}}{Y_{P1}}$$

Из (3.60) следует, что для безынерционных НЛ меняется зависимость только от амплитуды  $X_m$  входного сигнала, но не от его частоты.

2) Оценивание возмущений, модель внешней среды, квазимногочлены, процедура оценивания, модель углового движения искусственного спутника Земли по крену и оценка возмущающего момента. Анализ результатов моделирования.

**Квазимногочлены. Процедура оценивания**

Простейший вариант синтеза основан на исп. внеш. процессов ~~как~~ как квазимногочлены

$$\sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} p_i(t), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$p_i(t)$  - многочлен с коэфф.

Источники таких процессов - мн. мн. дигрффер. ур-е с поим. коэфф-циентами.

$$f(t), v(t) \Leftrightarrow \dot{x}_s(t) = A_s(t) x_s(t)$$

$$y_s(t) = C_s x_s(t) \quad (2.15)$$

$$x_s(t_0) = x_{s0} \quad t \geq t_0$$

$x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$  - вектор сост. групп

Вместо модели сост. возмущениями:

$$y_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s \times k}$$

$$y_s(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$A_s, C_s$  - матр. выб.

$$C_s = \begin{bmatrix} C_f \\ C_v \end{bmatrix} \begin{matrix} n \times n_s \\ l \times n_s \end{matrix}$$

Упр. связь между  $x_s(t)$  и возмущениями  $f(t)$  и помехами  $v(t)$

$x_s(t)$  - сост. модели внеш. воздействия.

$x_{s0} = ?$



$$\bar{x}(t) \triangleq (x(t), x_s(t)) \in \mathbb{R}^{n+n_s}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \geq t_0$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & c_F \\ 0_{n_s \times n} & A_s \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_s \times m} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [c, c_v]$$

$\bar{A}$  — блочная матрица из др. матриц.  
 $\bar{B}$  — нулевая матрица.

$$\bar{n} = n + n_s$$

$n$  — из объекта  
 $n_s$  — из среды

### Модель углового движения ИСЗ по крену и оценка возмущающего момента. Анализ результатов моделирования

Рассмотрим упрощенную модель углового движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) по крену

$$J_x \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = u(t) + M(t), \quad (8.17)$$

где  $J_x$  — момент инерции ИСЗ относительно продольной оси,  $\gamma(t)$  — угол крена,  $u(t)$  — управляющий момент,  $M(t)$  — возмущающий момент. Пусть доступна измерению угловая скорость крена  $\omega_x(t) \triangleq \dot{\gamma}(t)$ . Значения  $u(t)$  также считаются известными. Подлежит оцениванию неизмеряемый момент возмущений  $M(t)$ . Будем полагать его линейной функцией времени  $M(t) = M_0 + Vt$ , причем  $M_0$ ,  $V$  — неизвестные величины.

Этот процесс можно представить как решение системы однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = V(t), \\ \dot{V}(t) = 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

с неизвестными начальными условиями  $M(0)$ ,  $V(0)$ . Введем вектор состояния системы "объект – среда"  $\bar{x}(t) \triangleq [\omega_x(t), M(t), V(t)]^T$ . Выход системы  $\bar{y}(t) = \omega_x(t)$ . Таким образом, приходим к уравнениям состояния вида (8.16), в которых

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [1, 0, 0]. \quad (8.19)$$

Обратимся к синтезу наблюдателя. Наблюдатель полного порядка (8.3) для системы (8.17), (8.18) имеет размерность  $\bar{n} = 3$ . Переменные состояния наблюдателя  $\bar{x}_1(t)$ ,  $\bar{x}_2(t)$ ,  $\bar{x}_3(t)$  служат оценками переменных  $\omega_x(t)$ ,  $M(t)$ ,  $V(t)$  соответственно. Для определения трехмерного вектора параметров  $L$  наблюдателя найдем характеристический многочлен  $\det(s\mathbf{I}_3 - \bar{A} + L\bar{C}) = s^3 + l_1s^2 + \frac{l_2}{J_x}s + \frac{l_3}{J_x}$ . Приравняв его к стандартному многочлену Баттерворта

$A_n(s) = s^3 + 2\Omega_0s^2 + 2\Omega_0^2s + \Omega_0^3$ , получим выражения для  $l_i$ :  $l_1 = 2\Omega_0$ ,  $l_2 = 2J_x\Omega_0^2$ ,  $l_3 = J_x\Omega_0^3$ . Параметр  $\Omega_0$  задает быстродействие наблюдателя. Время переходного процесса составляет примерно  $5/\Omega_0$ . В развернутой форме уравнения наблюдателя (8.3) принимают в данном случае вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{\omega}}_x(t) = -l_1\hat{\omega}_x(t) + \hat{M}(t)/J_x + l_1\omega_x(t) + u(t)/J_x, \\ \dot{\hat{M}}(t) = -l_2\hat{\omega}_x(t) + \hat{V}(t) + l_2\omega_x(t), \\ \dot{\hat{V}}(t) = -l_3\hat{\omega}_x(t) + l_3\omega_x(t). \end{cases} \quad (8.20)$$

1) Методы линеаризации. Гармоническая линеаризация. Пример вычислений

коэффициента гармонической линеаризации для однозначных и многозначных нелинейностей, петля гистерезиса, двухпозиционное реле.

**9.2.2. Метод гармонической линеаризации**

Под *линеаризацией* понимают приближенную замену нелинейной функции линейной таким образом, чтобы по какому-то выбранному показателю обе эти функции совпадали.



Рис. 9.4. Нелинейный элемент

В способе гармонической линеаризации нелинейный элемент (рис. 9.4) заменяется квазилинейным звеном, параметры которого определяются при синусоидальном входном сигнале

$$\Delta = A \sin(\omega t) \tag{9.5}$$

из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена.

Рассмотрим процедуру линеаризации для нелинейного элемента, уравнение которого имеет вид

$$u = f(\Delta, \dot{\Delta}) \tag{9.6}$$

При поступлении на его вход гармонического сигнала (9.5) на выходе звена в установившемся режиме также будет периодический, но несинусоидальный сигнал

$$u = f[A \sin(\omega t), A \omega \cos(\omega t)] = f(A, \omega t) \tag{9.7}$$

Разложим его в ряд Фурье [11] и получим

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega t) + c_k \cos(k\omega t)], \tag{9.8}$$

где будем полагать  $u_0 = 0$ , что справедливо для симметричной нелинейной характеристики (9.6).

С учетом (9.7) коэффициенты ряда Фурье (9.8) определяются известными соотношениями

$$\begin{cases} b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \\ c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \end{cases}$$

Используем только первые члены ряда разложения в (9.8), пренебрегая высшими гармониками, и получим

$$u \approx b_1 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t) \tag{9.9}$$

Учтем, что  $\Delta = A \sin(\omega t)$ , а  $\dot{\Delta} = A \omega \cos(\omega t)$ , следовательно,

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{\Delta}{A}, \\ \cos(\omega t) = \frac{\dot{\Delta}}{A\omega}. \end{cases} \tag{9.10}$$

После подстановки (9.10) в (9.9) получим выражение для выходного сигнала нелинейного звена

$$u = \frac{b_1}{A} \Delta + \frac{c_1}{A\omega} \dot{\Delta},$$

которое, если принять обозначения

$$\begin{cases} q_1(A, \omega) = \frac{b_1}{A}, \\ q_2(A, \omega) = \frac{c_1}{A\omega}, \end{cases} \tag{9.11}$$

можно записать в виде

$$u = q_1(A, \omega) \Delta + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} \dot{\Delta} \tag{9.12}$$

Здесь  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  – коэффициенты гармонической линеаризации.



Примеры вычисления коэффициентов гармонической линейзации:

а) петля гистерезиса

$$Q(X_m) = \frac{y_{Q1}}{X_m} = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t)$$

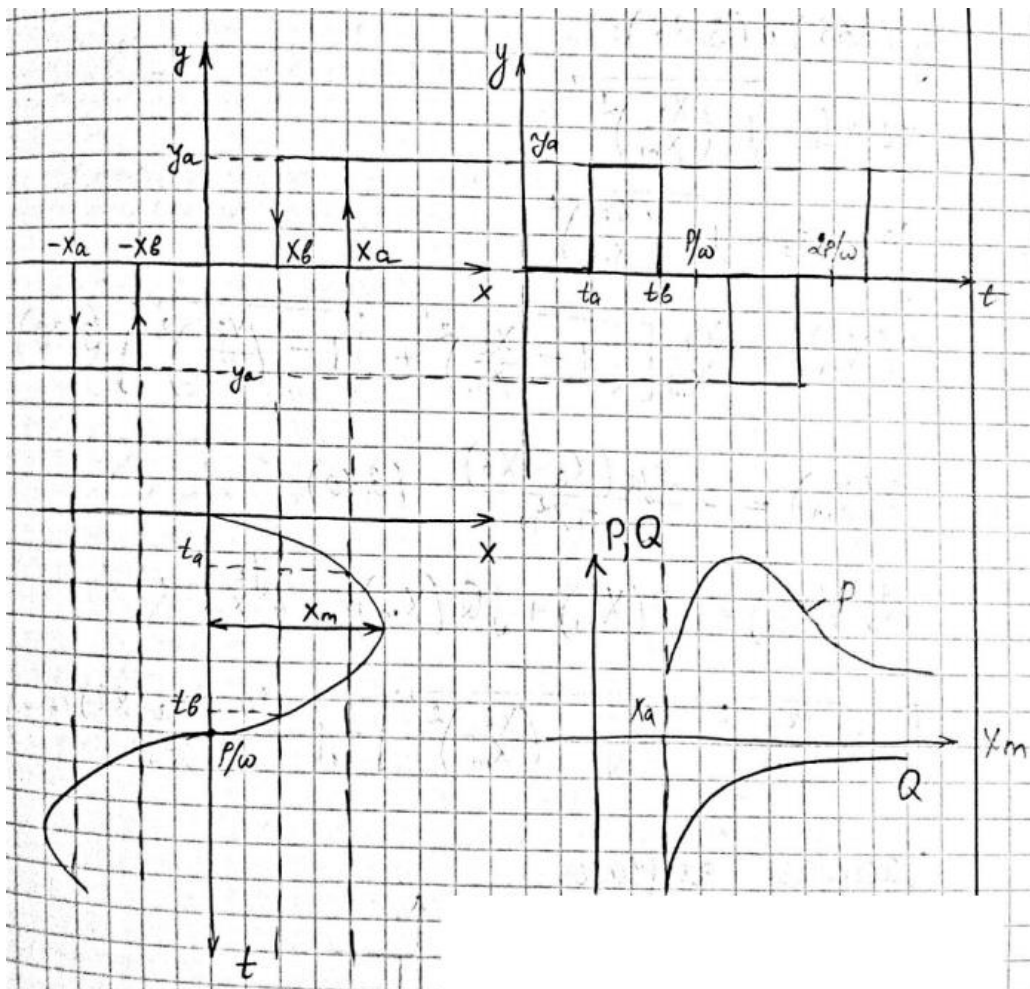
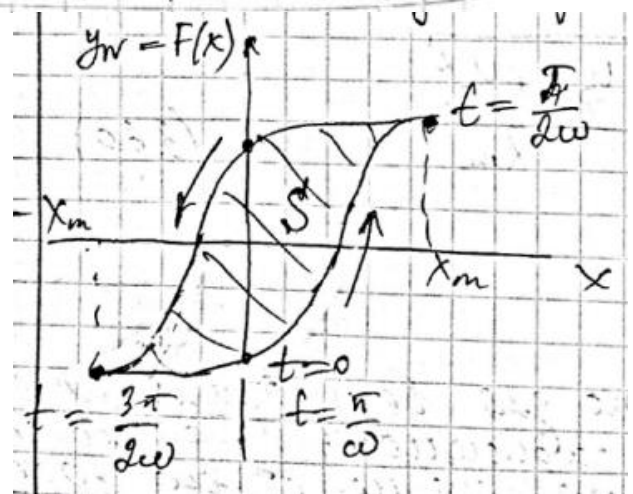
$$= \frac{1}{\pi X_m^2} \oint F(x) d(X_m \sin \omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi X_m^2} \oint F(x) dx = \frac{1}{\pi X_m^2} S \quad (3.61)$$

$S$  - площадь, ограниченная этой кривой

б) двухпозиционное реле

Коэффициенты гармонической линейзации и коэффициент усиления:





из (3.65) и (3.66):

$$\cos \omega t_a = \sqrt{1 - \left(\frac{X_a}{X_m}\right)^2}$$

$$\cos \omega t_b = \sqrt{1 - \left(\frac{X_b}{X_m}\right)^2}$$

$$P(X_m) = \frac{2U_a}{n X_m} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{X_a}{X_m}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{X_b}{X_m}\right)^2} \right] \quad (3.69)$$

$$Q(X_m) = - \frac{2U_a (X_a - X_b)}{n X_m^2} \quad (3.70)$$

$$G_N(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m) = \frac{2U_a}{n X_m} \cdot$$

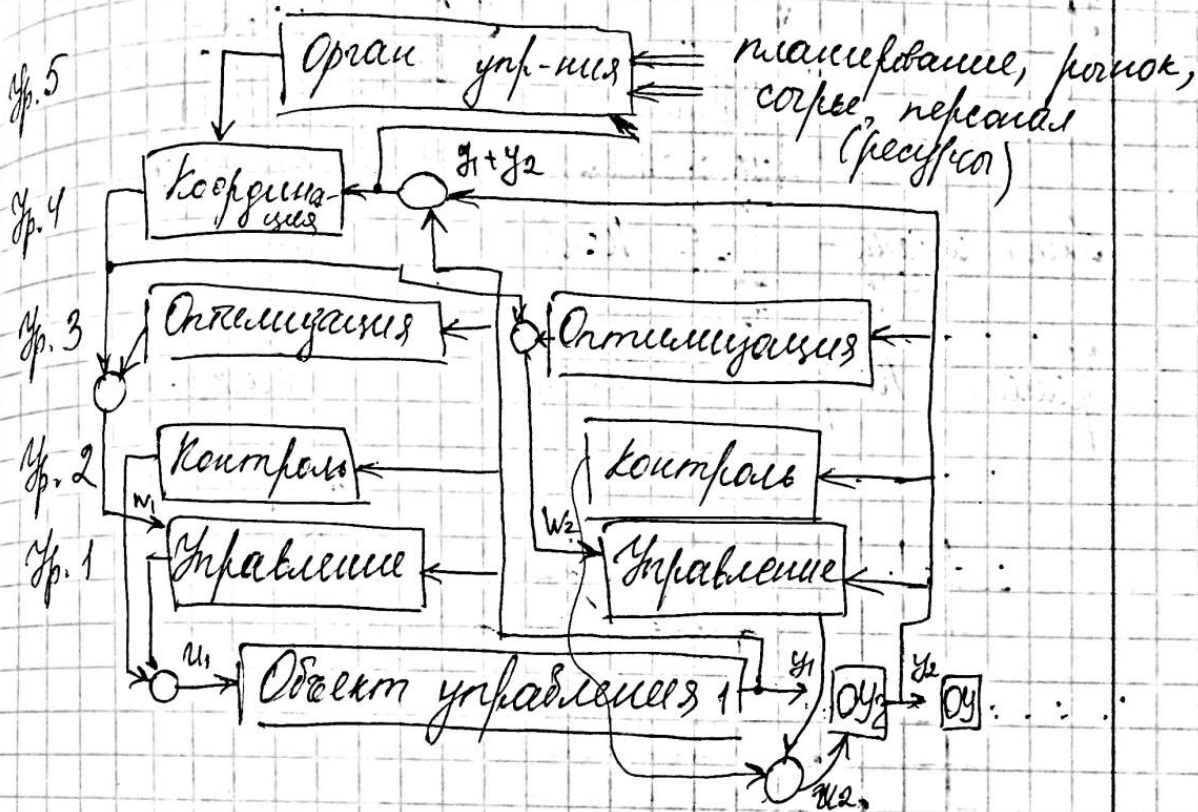
$$\left[ \sqrt{1 - \left(\frac{X_a}{X_m}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{X_b}{X_m}\right)^2} \right] - j \frac{2U_a (X_a - X_b)}{n X_m^2} \quad (3.71)$$

$$\begin{cases} X_m \sin \omega t_a = X_a \\ \sin \omega t_a = \frac{X_a}{X_m} \end{cases} \quad (3.65)$$

$$X_m \sin \omega \left( \frac{\pi}{\omega} - t_b \right) = X_b; \quad \sin \omega \left( \frac{\pi}{\omega} - t_b \right) = \frac{X_b}{X_m} \quad (3.66)$$

Иерархическая структура управления. История применения управляющих вычислителей.

# Иерархическая структура управления



1959г - впервые были использованы микропроцессоры в вычислителях

с 1962г - непосредств. управление в (цифровое)

1971, 75 - применение микро ЭВМ в контуре упр-ния

## Билет №11

1) Основные определения: фазовое пространство, фазовый портрет, изображающая точка, фазовая траектория. Элементы фазовых портретов нелинейных систем: предельные циклы, сепаратрисы. Перестройка фазового портрета – бифуркация. Классификация локальных структур фазового портрета через линейный анализ в окрестности исследуемой особой точки: узлы, центр, фокусы, седло.

Гудим считать  $u(t) = 0$   
Фазовые НЛС  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^n$  зависят от н.у.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (5.1)$$

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} \quad (5.2) \quad \bar{x} - 1 \times n - \text{в-р состояний}$$

У НЛС может быть несколько особых точек с разной динамикой и разной устойчивостью. НУ определяют то, ближе к какой из них мы окажемся. Т.е. какая будет влиятельнее, такая и определит динамику.

Геометрическая интерпретация ур-ния (5.1)  
м.б. дана как семейство кривых в пространстве размерности  $n$  с координатами  $\{x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\}$ .

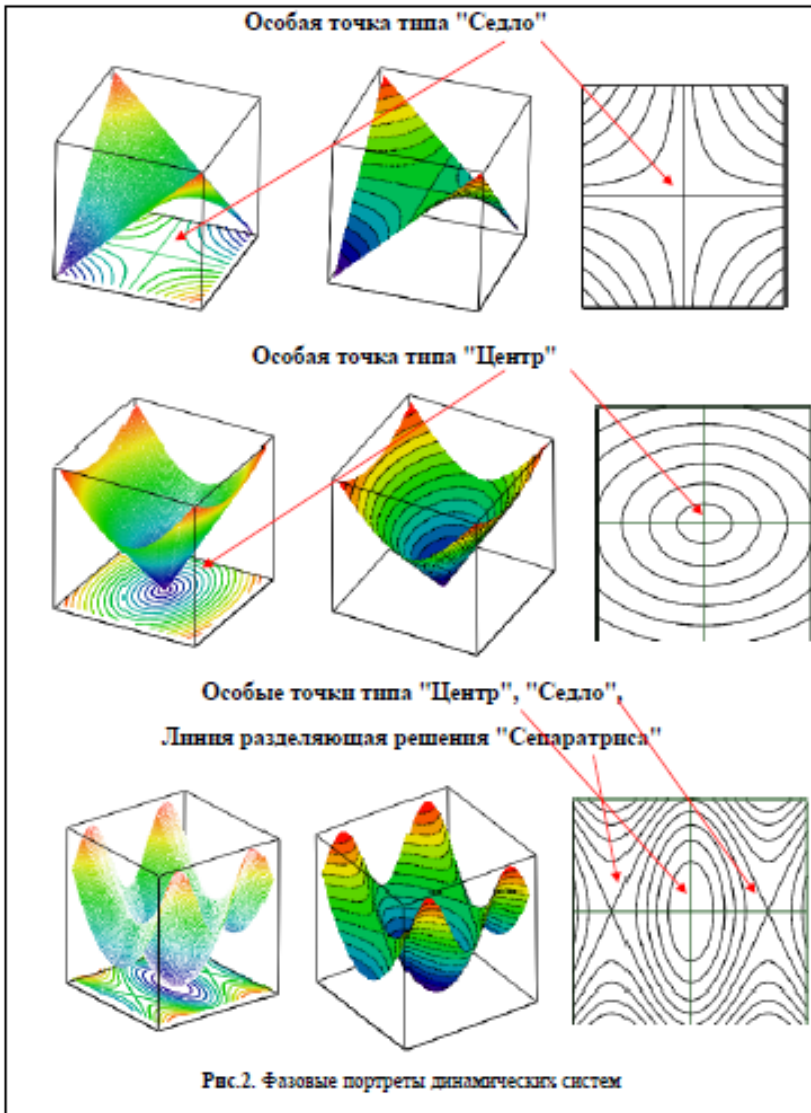
- 1)  $n$ -мерное фазовое пространство
- 2) траектории, явл. решениями (5.1) – фазовые траектории
- 3) Фазовый портрет – представление фазовых траекторий в фазовом пространстве
- 4) Изображающая точка – решение (5.1) на фазовой кривой в момент времени  $t$  при заданных н.у.

Любая электромеханическая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.

Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них сложных динамических процессов используют фазовое пространство, в котором строятся фазовые портреты



(см. рис. 2). Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются особые точки – точки положения равновесия, которые помогают, без решения дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки равновесия могут быть устойчивыми или



неустойчивыми. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы (см рис). Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать что может привести к разрушению системы (см. рис/ 2). ПЕРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

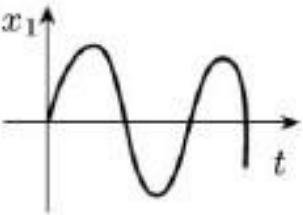
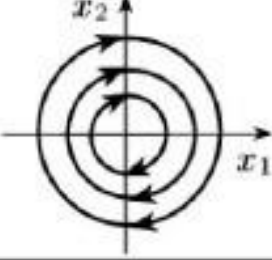
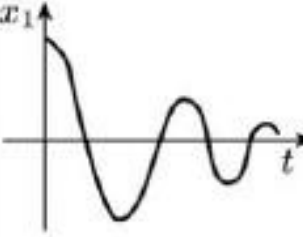
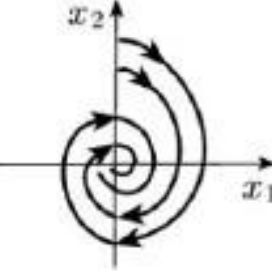
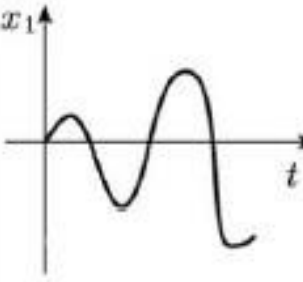
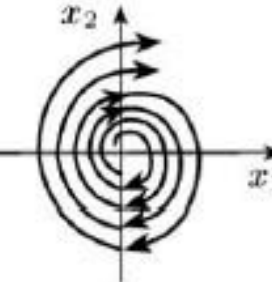
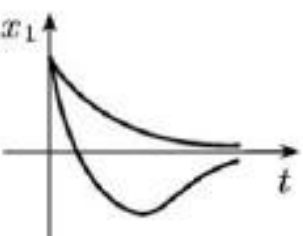
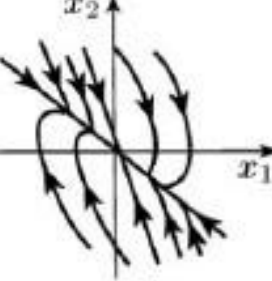
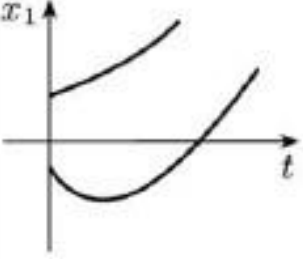
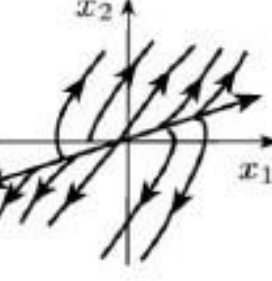
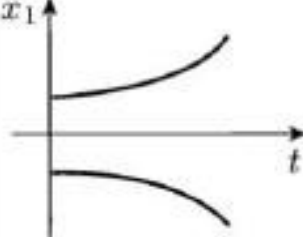
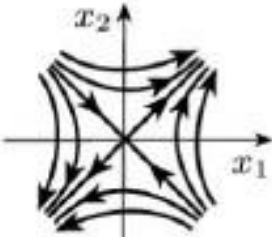
- изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве динамич. системы, изображающая периодич. движение. В окрестности П. ц. фазовые траектории либо удаляются от него (неустойчивый П. ц.), либо неограниченно приближаются к нему - "наматываются" на него (устойчивый П. ц.). Поведение траекторий в окрестности П. ц. связано со значениями его мультипликаторов (см. Бифуркация). Устойчивый П. ц. является матем. образом периодич. автоколебаний.  
СЕПАРАТРИСА- траектория динамической системы сходящаяся к седловому  $t \rightarrow \infty$  (устойчивая)  $t \rightarrow -\infty$  (неустойчивая С.). Если С.  $t \rightarrow \pm \infty$ , то её (вместе с седлом) называют петлей С.

Перестройка фазового портрета – бифуркация. Классификация локальных структур фазового портрета через линейный анализ в окрестности исследуемой особой точки: узлы, центр, фокусы, седло.

Если ФП линеаризовать в окрестности особых точек, то получится какая-то система дифференциальных уравнений первого порядка, которая описывает динамику в окрестности этой особой точки. Можно найти корни характеристического уравнения этой системы. Решением этих уравнений будет сумма экспонент в степенях, соответствующим корням характеристического уравнения. Соответственно по знакам этих корней можно классифицировать всю динамику, которая возможна в таких системах. Если корни оба действительные и положительные, то у нас будет 2 растущие экспоненты. И у нас будет не устойчивая точка, которая называется узлом. Соответственно если обе экспоненты отрицательные, то такая точка будет устойчивая и называться так же будет узлом. Если один из корней комплексный, а другой действительный и положительный (второй мнимый), то будет экспонента на сумму синусов и косинусов. Экспонента в положительной степени умноженная на сумму синуса и косинуса. Это будет расходящаяся логарифмическая спираль. Это будет неустойчивый фокус. Если экспонента затухает, то фокус устойчивый.

Два комплексных корня это колебания. (окружность или эллипс). Эта точка называется центром. Тут нельзя говорить об устойчивости/неустойчивости, поскольку траектории не расходятся.

Есть еще вариант. Когда 1 корень положительный, другой корень отрицательный. Тогда по одному направлению (переменной) будет устойчивость, тому, которому соответствуют собственные значения отрицательные, а по другому, в котором остаются положительные, будут расходящаяся динамика. Эта точка называется седлом. (гиперболический параболоид – по одному направлению устойчивы, по другому нет).

Тип корней	Кривая переходного процесса	Фазовый портрет	Тип особой точки
Чисто мнимые			Центр
Комплексные с отрицательной действительной частью			Устойчивый фокус
Комплексные с положительной действительной частью			Неустойчивый фокус
Действительные отрицательные			Устойчивый узел
Действительные положительные			Неустойчивый узел
Действительные разных знаков			Седло

2) Наблюдатель Калмана, определение параметров наблюдателя из условия максимального быстродействия. Многочлен Баттерворта. Дискретный наблюдатель состояния.

Наблюдатель состояния (идентификатор состояния, наблюдающее устройство, наблюдатель) можно представить в виде модели объекта управления, на вход которой поступает то же управляющее воздействие, что и на объект управления и, кроме того, дополнительный сигнал коррекции (обратной связи). Этот сигнал получается из невязки между выходами объекта и модели (рис. 8.1).

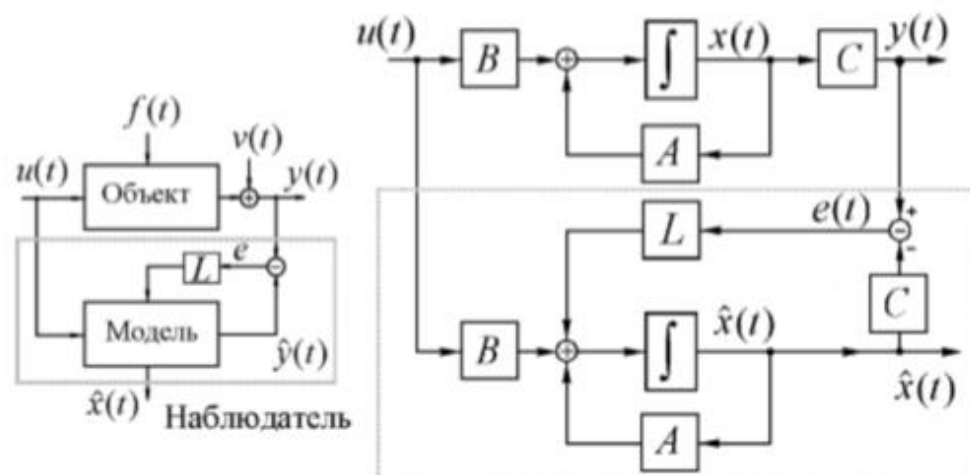


Рис. 8.1. Принцип построения и структурная схема наблюдателя.

Его влияние придает поведению модели качественно новые свойства (отличные от свойств объекта). Собственные движения модели и объекта оказываются различными, но переменные состояния модели служат оценками состояния объекта. Для систем непрерывного времени наблюдатель описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C(t)\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Здесь  $\hat{x}(t) \in \mathcal{R}^n$  — вектор состояния наблюдателя, служащий оценкой состояния объекта;  $\hat{y}(t) \in \mathcal{R}^l$  — вектор выхода;  $L(t)$  —  $n \times l$ -матрица коэффициентов обратной связи по невязке между выходами объекта и наблюдателя. Синтез наблюдателя заключается в выборе матрицы  $L(t)$ .

Отметим, что мы рассматриваем наблюдатель, у которого размерность вектора состояния такая же, как и у объекта (так называемый наблюдатель полного порядка, или наблюдатель Калмана). Однако это условие необязательно: встречаются



Дискретный наблюдатель состояния

Для определения желаемых коэффициентов характеристического многочлена (8.5) рекомендуется использовать стандартные формы, например *биномиальную* форму, или форму *Баттерворта*: [47, 76]

$$\det(s\mathbf{I}_n - A_n) = \prod_{\nu=1}^n \left( \frac{s}{\omega_0} - e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)} \right),$$

где параметр  $\omega_0$  – среднегеометрический корень многочлена определяет быстродействие наблюдателя.

## Билет №12

1) Фазовые траектории нелинейных систем. 4 класса траекторий. (Область устойчивых движений, область устойчивых автоколебаний, область неустойчивых движений, область сложной динамики). Способы построения фазовых портретов.

Фазовые траектории нелинейных систем. 4 класса траекторий. (Область устойчивых движений, область устойчивых автоколебаний, область неустойчивых движений, область сложной динамики).


$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = -b_1 - b_0 \frac{x(t)}{y(t)} \quad (5.7)$$

(5.7) позволяет построить фазовый портрет  $(y(x))$ , интегрируя, связанная со временем, но фазовый портрет не меняется.

дифференцирует фаз. дин-цу, не меняя фаз. портрет

$$(5.8) \quad \lambda_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_0} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sigma \pm j \omega_d$$

$$(5.9) \quad \textcircled{1} \quad \frac{\text{устойчив}}{\zeta > 0} \quad \begin{cases} x(t) = A \sin(\omega_n t + \varphi) \\ y(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_n A \cos(\omega_n t + \varphi); \omega_n^2 = b_0 \end{cases}$$

$$(5.10) \quad \textcircled{1} \quad \text{Ф.Т.} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\omega_n A)^2} = 1 \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{колебания} \\ \text{матем. маятника} \end{array}$$


② устойчивый фокус  $\sigma > 0$

$$(5.11) \quad \begin{cases} x(t) = A e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \varphi) \\ y(t) = \frac{dx}{dt} = \gamma A e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \varphi + \theta) \end{cases}$$

$$\sigma = \zeta \omega_n = \frac{b_1}{2}$$

$$\omega_d = \sqrt{b_0 - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\gamma = \sqrt{b_0} = \omega_n$$

затухающие колебания

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)$$

no t



ФП



③ Узгн. узгн.

$\omega_d = 0 ; \sigma_1, \sigma_2$

$b_1^2 > 4b_0 ; b_1 > 0, b_0 > 0$

(5.8)

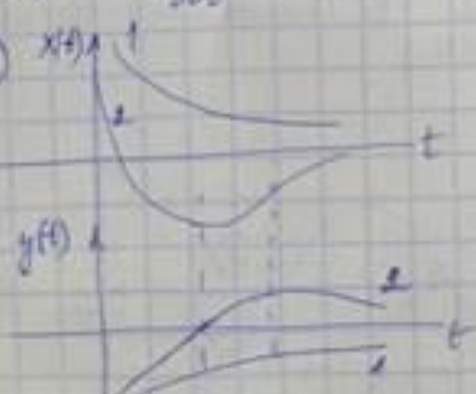
$z(t) = C_1 e^{-\sigma_1 t} + C_2 e^{-\sigma_2 t}$

$\sigma_{1,2} = -\lambda_{1,2} > 0$

(5.12)

$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -\sigma_1 C_1 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_2 C_2 e^{-\sigma_2 t}$

no t



ФП



У-ок-ме of us toew no or

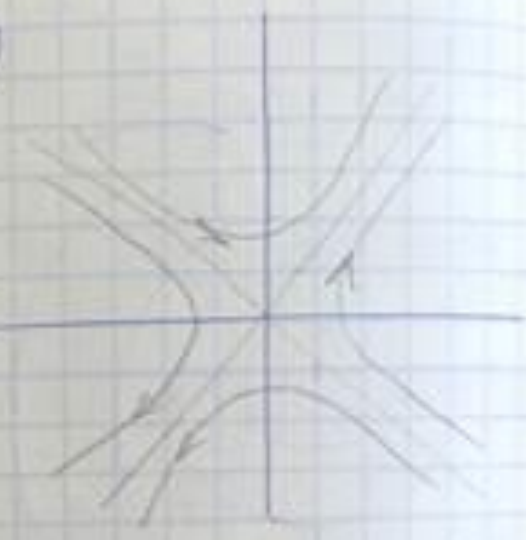
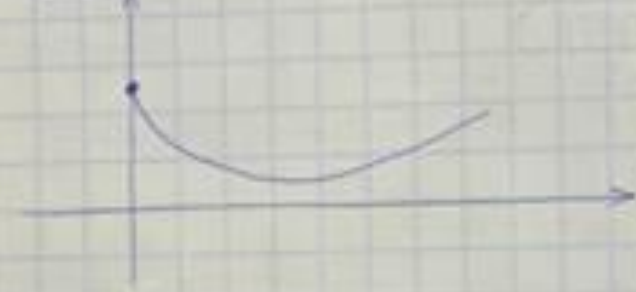


4. сегно  $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sqrt{-b_0}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(b_0)^2} = 1$$

$x, t$

$\Phi(t)$



### Стационарные портреты НЛС

1) окрестности особых точек в  $\delta$ -окрестности  $f$  в малых окрестностях  $\text{сохр}$  свойства графовых портретов, напр.  $\text{числ}$  особн точек или  $\text{сигн}$  тавто  $\text{чи}$  характера)  $\text{сигно}$



Может возникнуть бифуркация кол-во особн точек  $\text{параметр}$   $\text{меня}$



Удобно определять характеристический многочлен, зная собственные значения  $\lambda_i$

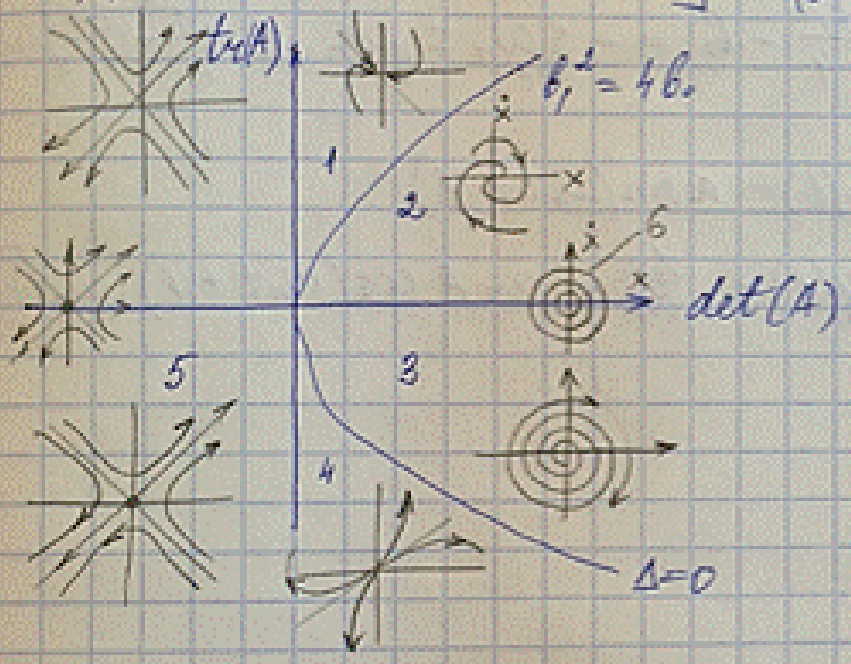
$$n=2; \quad \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

сумма элементов главной диаг.  $\sum a_{ii} = \text{tr}(A)$

$$\Delta = (\text{tr}[A])^2 - 4 \det(A) \quad (5.3)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [\text{tr}[A] \pm \sqrt{\Delta}] \quad (5.4)$$

вект. поле на плоскости



- 1) узловая точка
- 2) центральная точка
- 3) седловая точка
- 4) центральная точка
- 5) седло
- 6) центр

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) = 0 \quad (5.5)$$

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2}; \quad b_0 = \frac{a_0}{a_2}$$

$$b_1 = 2\zeta\omega_n; \quad b_0 = \omega_n^2; \quad \omega_n - \text{собств. частота}$$

$\zeta - \text{к-м демпфирования}$

$$y = \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -b_1 y(t) - b_0 x(t); & \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \end{cases}$$

## Способы построения фазовых портретов.

**Метод приспособывания.** В общем случае как задача 1 нахождения в аналитической форме решений  $x_i(t) = x_i(t, x_0, \dots)$ , так и задача 2 исключения времени представляют значительные трудности.

3) Для получения фазового портрета необходимо провести ряд преобразований исходного дифференциального уравнения:

$$T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2T\xi \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

1. Исключение  $t$  из уравнения, которое отсутствует в фазовой траектории в явном виде. Для этого исходное уравнение делим на  $y = \frac{dx}{dt}$  (2):

$$T^2 \frac{dy}{y \cdot dt} + 2T\xi + \frac{x}{y} = 0 \quad (3)$$

$$T^2 \frac{dy}{dx} + 2T\xi + \frac{x}{y} = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет фазовую траекторию для конкретного случая  $f(x, y) = \frac{-2T\xi y - x}{T^2 y}$ .

2. Разделение переменных (они могут не разделяться. С помощью кси разделяем – обнуляем. **Надо посмотреть в лекциях**) для интегрирования уравнения.

$\xi=0$

$$T^2 \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow T^2 y dy = -x dx$$

3. Интегрирование

$$\int T^2 y dy = - \int x dx \Rightarrow \frac{T^2 y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

**Короче тут левак, надо переделать!**

Мирошник. ТАУ. Глава 2 (стр. 40)

**2) Постановка задачи и три типа оценок состояния. Модель объекта в непрерывной и дискретных формах, возмущение и шум. Наблюдатели состояния. Принцип построения и структурная схема. Уравнение наблюдателя. Ошибка оценивания.**

*Постановка задачи и три типа оценок состояния. Модель объекта в непрерывной и дискретных формах, возмущение и шум.*

$x(t)$  – измеряемый

$u(t)$  – известный

выход  $y(t) = [0, 1]x(t)$



$$Q_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det Q_H \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{v}}(t) = (1 - l_1)\hat{x}(t) + l_1 x(t) - \frac{g}{l} u(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \frac{g}{l} \hat{v}(t) + l_2(\hat{x}(t) - x(t)) \end{cases}$$

$l_1, l_2$  – параметры наблюдателя

$$\det(sI - A_H) = s^2 + l_2 s + g(l_1 - 1)/l$$

Если шумы измерений фильтровать не нужно, то можно обойтись без  $\hat{x}(t)$ , и воспользоваться наблюдателем Луенбергера.

Используемые уравнения имеют каноническую форму, преобразование базиса выполнять не нужно

$$A_{11} = A_{22} = 0; \quad A_{21} = 1, \quad A_{12} = \frac{g}{l}, \quad B_1 = -\frac{g}{l}$$

$\hat{v}(t) = -e \hat{v}(t) + \left(\frac{g}{e} - e^2\right) x(t) - \frac{g}{e} u(t)$   
 $e - \text{пар-р}; \quad \det(sI - A_H) = s + \frac{e}{e}$   
 $e = -s_1 l; \quad s_1 - \text{требуемый корень}$

Алгоритм построения наблюдателя Луенбергера. ((n-1) – мерные наблюдатели):

- Уравнение состояния системы матрицы A, B, C → (ИКП к канонической форме)
- Необходимо получить матрицу Фробениуса из матрицы A
- $\beta_i$ :  $\det(sI - A_H) = s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$
- Матрица преобразования вида (I - ед. матрица)

$$P = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ & -\beta_{n-2} \\ & \dots \\ & -\beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & \beta_{n-2} \\ & \dots \\ & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(s - \beta_1) \beta_{n-1} - d_n$$
  

$$(s - \beta_1) \beta_{n-2} - d_{n-1} + \beta_{n-1}$$
  

$$(s - \beta_1) \beta_1 - d_1 + \beta_2$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 - \beta_{n-1} b_n \\ b_2 - \beta_{n-2} b_n \\ \dots \\ b_{n-1} - \beta_1 b_n \\ \hline b_n \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} b_1 - \beta_{n-1} b_n \\ b_2 - \beta_{n-2} b_n \\ \dots \\ b_{n-1} - \beta_1 b_n \\ \hline b_n \end{bmatrix}} \right\} \bar{B}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{A} \tilde{x}(t) + \bar{A}_n y(t) + \tilde{B} u(t)$$

Для оценки вектора состояния в основном базисе:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t)_{n-1} \\ y(t)_1 \end{bmatrix} ; \quad \hat{x}(t) = P^{-1} \tilde{x}(t)$$

вектор состояния

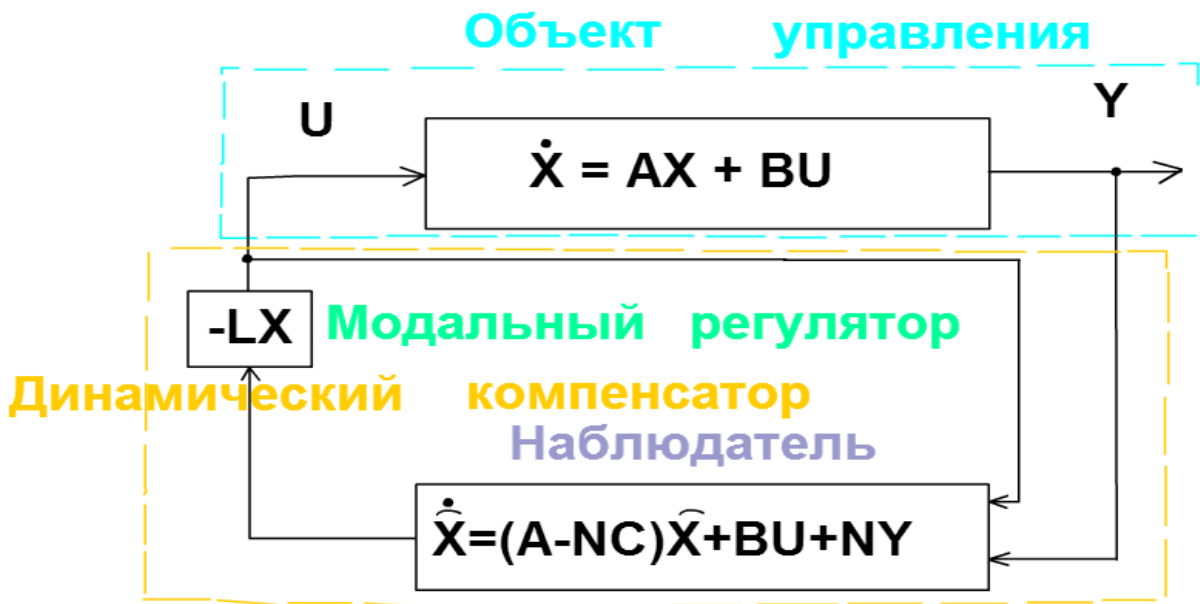
### Наблюдатели состояния. Принцип построения и структурная схема. Уравнение наблюдателя. Ошибка оценивания.

Часто при решении практических задач модального управления в САУ бывают доступны для измерения не все переменные состояния объекта, а только некоторые входы и выходы. В настоящее время известны два подхода косвенного определения компонент вектора состояния управляемого объекта, недоступных прямому измерению. Один подход основан на применении динамических компенсаторов, т.е. идентификаторов состояния, другие методы основаны на применении наблюдающих устройств, предложенных Р.Калманом (фильтр Калмана) и Луенбергером.

Состояние  $X(t)$  называется наблюдаемым, если в момент наблюдения  $t = t_0$  можно однозначно определить начальное состояние  $X(t_0)$  по данным измерения  $Y(t)$  и  $U(t)$  на конечном интервале  $t_0 \leq t \leq t_k$  при  $u(t) = 0$ . САУ называется полностью управляемой, если из любого начального состояния  $X(t_0)$  ее можно перевести в конечное состояние  $X(t_k)$  при помощи некоторого входного сигнала в течение конечного интервала времени.

Когда часть компонент полного вектора состояния можно определить по результатам непосредственного их измерения на управляемом объекте, то целесообразно синтезировать редуцированные наблюдающие устройства. Редуцированным наблюдающим устройством называется устройство, порядок характеристического уравнения которого меньше порядка характеристического полинома наблюдаемой системы.

Сформируем требуемый закон управления, но вместо переменных состояния реального объекта будем использовать их оценки, полученные с помощью наблюдателя (рис).



Пусть объект управления описывается уравнением (3.1). Тогда работа наблюдающего устройства для оценки переменных состояния  $X$  по измеряемым переменным управления  $U$  и выходным переменным  $Y$  должна строиться в соответствии с уравнением:

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU + N(Y - \hat{Y}), \\ \hat{Y} = C\hat{X}, \end{cases} \quad (3.13)$$

где  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  — оценочные соответственно вектор переменных состояния и выхода наблюдателя;  $N$  — матрица коэффициентов усиления (настройки) наблюдателя, подлежащих определению.

Уравнения наблюдателя (3.13) описывают регулятор, входом которого является процесс  $Y$ , выходом — новое управляющее воздействие  $U$ . В отличие от модального регулятора с матрицей коэффициентов обратных связей  $L$  по уравнению (3.2), представленный регулятор является уже динамической системой, порядок которой совпадает с порядком объекта управления. И называют такой регулятор динамическим компенсатором. Объединив уравнения (3.13), получим:

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} - NC\hat{X} + BU + NY. \quad (3.14)$$

Если в уравнении (3.14) заменить выход  $Y = CX$ , то уравнение наблюдателя можно записать в следующем виде:

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} - NC\hat{X} + BU + NCX \quad (3.15)$$

Обозначим ошибку оценки переменных состояния как  $\varepsilon = \hat{X} - X$  и вычтем из уравнения (3.15) уравнение (3.1). Тогда векторное уравнение для ошибки будет иметь вид:

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon - NC\varepsilon = (A - NC)\varepsilon = H\varepsilon,$$

где  $H$  — матрица динамических свойств наблюдателя.

Выбрав элементы матрицы  $N$  так, чтобы система (3.15) была устойчивой, получим:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad (3.16)$$

т.е. при  $t \rightarrow \infty$  оценочные переменные состояния наблюдателя стремятся к переменным состояниям объекта. Известно, что если объект управления невырожденный, то выбором элементов матрицы  $N$  наблюдателю можно придать любое желаемое распределение корней характеристического уравнения (3.17).

$$D(p) = \det |pI - N| \quad (3.17)$$

Уравнение наблюдателя в конечном итоге приобретает вид:

$$\dot{\hat{X}} = N\hat{X} + BU + NY. \quad (3.18)$$

Для выбора распределения корней характеристического уравнения наблюдателя обычно пользуются одной из стандартных форм, например (3.6). При этом также как и при расчете модального регулятора приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях оператора  $p$  в уравнениях (3.17) и (3.6) и находят выражения для определения элементов матрицы  $N$  наблюдателя через параметр  $\omega$  стандартных форм.



## Билет №13

### 1) Фазовый портрет нелинейных систем.

Лекции + Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Баутин Н.Н., Леонтович Е.

Худее считать  $u(t) = 0$   
 Поведение НЛС  $\forall \epsilon > 0$  зависит от н.у.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (5.1)$$

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} \quad (5.2) \quad \bar{x} - 1 \times n - \text{в-р составляющих}$$

У НЛС может быть несколько особых точек с разной динамикой и разной устойчивостью. НУ определяют то, ближе к какой из них мы окажемся. Т.е. какая будет влиятельнее, такая и определит динамику.

Геометрическая интерпретация ур-ния (5.1)  
 м.б. дана как семейство кривых в пространстве размерности  $n$  с координатами  $\{x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\}$ .

- 1)  $n$ -мерное фазовое пространство
- 2) траектории, являющиеся решениями (5.1) — фазовые траектории
- 3) Фазовый портрет — представление фазовых траекторий в фазовом пространстве
- 4) Обратная точка — решение (5.1) на фазовой кривой в момент времени  $t$  при заданных н.у.

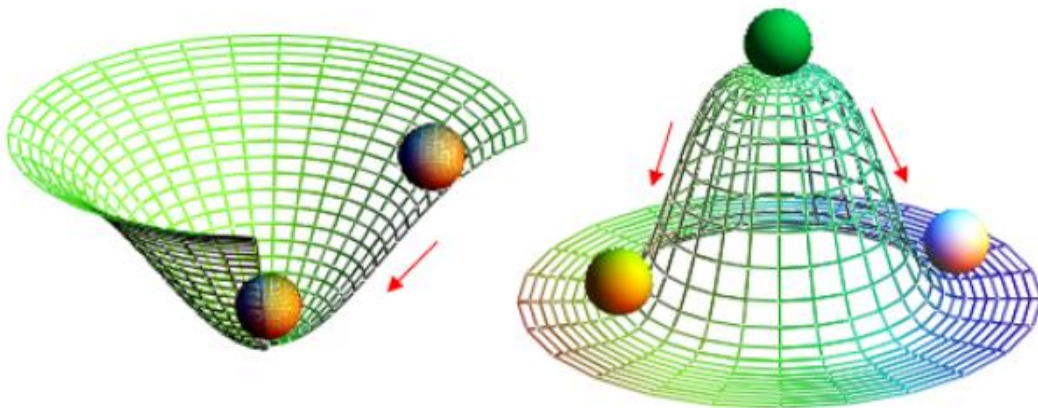


Рис. 1 Устойчивая система

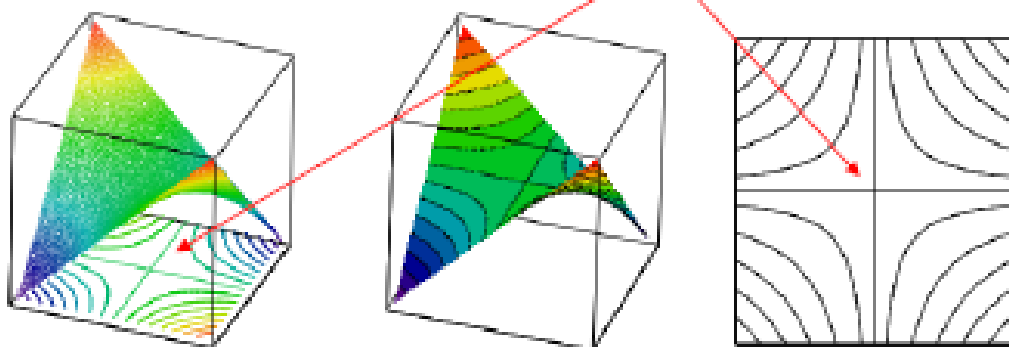
Неустойчивая система



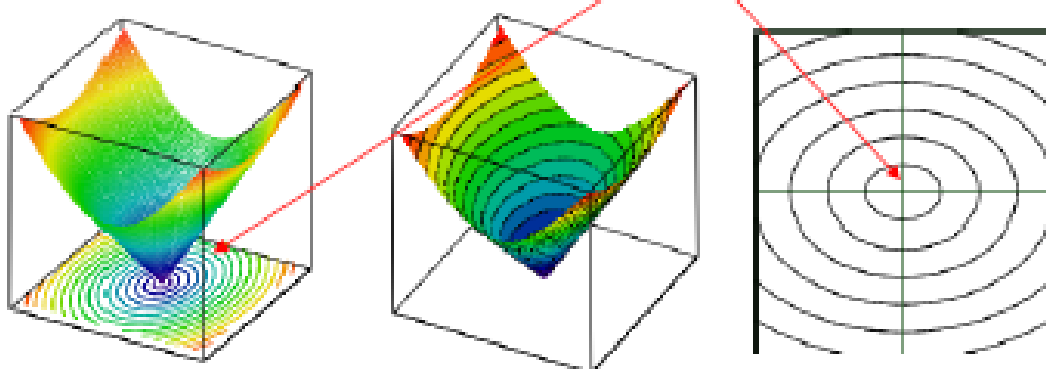
Любая электромеханическая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.

Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них сложных динамических процессов использует фазовое пространство, в котором строятся фазовые портреты (см. рис. 2). Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются особые точки – точки положения равновесия, которые помогают, без решения дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки равновесия могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы (см рис). Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать что может привести к разрушению системы (см. рис/ 2).

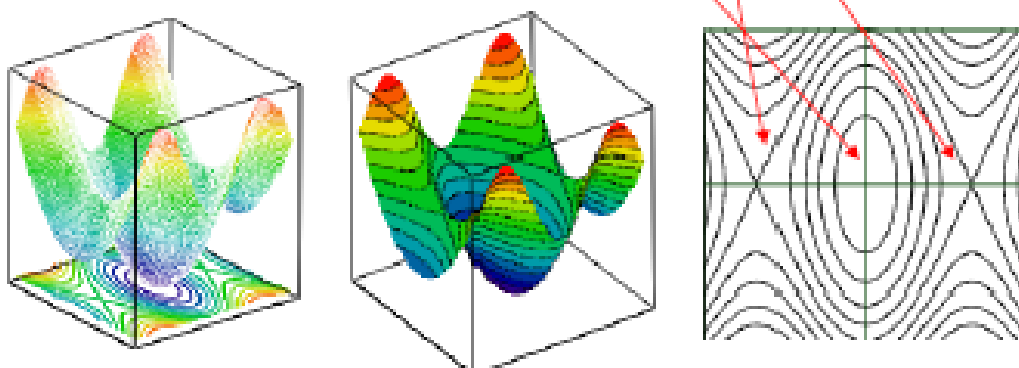
**Особая точка типа "Седло"**



**Особая точка типа "Центр"**



**Особые точки типа "Центр", "Седло",  
Линия разделяющая решения "Сепаратриса"**



Элементы фазовых портретов нелинейных систем:  
**ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ**  
 - изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве динамич. системы, изображающая периодич. движение. В окрестности П. ц. фазовые траектории либо удаляются от него

**Рис.2. Фазовые портреты динамических систем**

(неустойчивый П. ц.), либо неограниченно приближаются к нему - "наматываются" на него (устойчивый П. ц.). Поведение траекторий в окрестности П. ц. связано со значениями его мультипликаторов (см. Бифуркация). Устойчивый П. ц. является матем. образом периодич. автоколебаний.

## СЕПАРАТРИСА

- **траектория** динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени  $t \rightarrow \infty$  (устойчивая С.) или при  $t \rightarrow -\infty$  (неустойчивая С.). Если С. стремится к седлу при  $t \rightarrow \pm \infty$ , то её (вместе с седлом) называют петлей С. Надо добавить другое определение сепаратрисы. Тут очень жесткое определение.

## 2) Устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону и возвраты по Пуанкаре. Понятие сечения Пуанкаре. Периодические, квазипериодические и хаотические движения. Устойчивость по Ляпунову. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя. Карты ляпуновского показателя и их применение к анализу нелинейных систем.

*Устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону и возвраты по Пуанкаре. Понятие сечения Пуанкаре.*

Ответ

### Показатели Ляпунова.

$$D(t) = D(0)e^{\lambda t} \quad \lambda = \lim_{\substack{D(0) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)}$$

$\lambda$  - показатель Ляпунова

Для одномерной системы:

- $\lambda = 0$  - расстояние между точками сохраняется, а система является консервативной.
- $\lambda < 0$  - расстояние между точками уменьшается, а аттрактором могут быть только неподвижные точки. Иначе пишут  $\lambda = (-)$
- $\lambda > 0$  - расстояние между точками экспоненциально увеличивается, траектории стремятся к бесконечности.  $\lambda = (+)$ .

В двумерной системе возможные аттракторы - точки и предельные циклы:  
 $(\lambda_1; \lambda_2) = (-; -)$  аттрактор - устойчивая стационарная точка (фокус или узел);  
 $(\lambda_1; \lambda_2) = (-; 0)$  аттрактор - предельный цикл.

В трехмерной системе возможные аттракторы - точки, предельные циклы, инвариантные торы, странные аттракторы:

- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (-; -; -)$  аттрактор - фокус или узел);
- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; -; -)$  аттрактор - предельный цикл;
- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; 0; -)$  аттрактор - устойчивый инвариантный тор;
- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (+; 0; -)$  странный аттрактор.

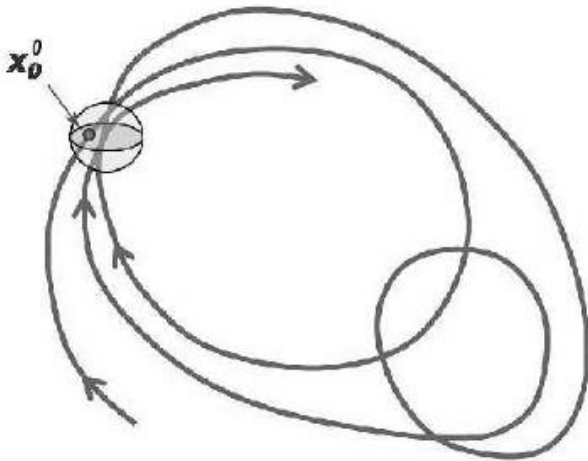
Устойчивость по Пуассону означает, что через некоторое время фазовая траектория возвращается в сколь

угодно малую окрестность начальной точки.

Интервал времени, по прошествии которого траектория возвращается в окрестность точки  $x_0^0$  заданного радиуса  $\varepsilon$ , называется *периодом возврата Пуанкаре*.

Любой установившийся режим колебаний нелинейных диссипативных систем представляется траекториями, устойчивыми по Пуассону. Это относится и к динамическому хаосу, связанному с существованием странного аттрактора – режиму, который можно считать установившимся в смысле постоянства во времени его усредненных статистических характеристик.

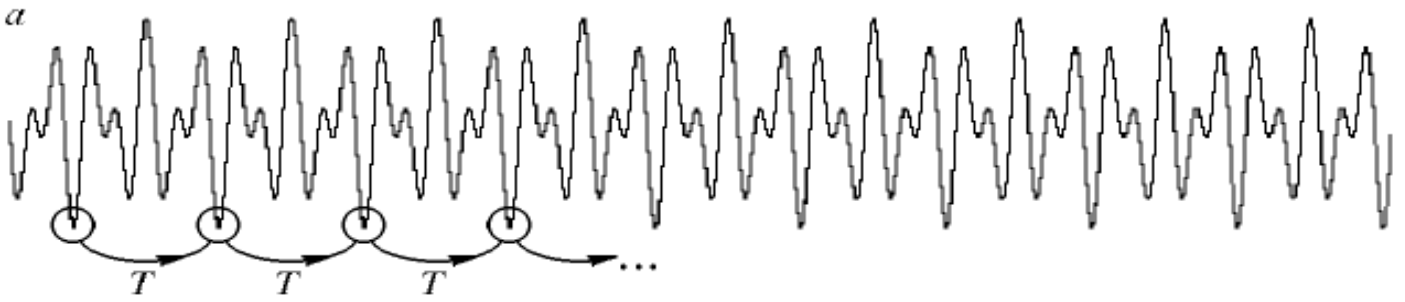
Точка фазового пространства  $y$  называется  $\omega$ -*предельной точкой* фазовой траектории  $x(t)$ , если можно указать такую последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow \infty$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = y$ . Аналогично, точка  $z$  называется  $\alpha$ -*предельной точкой*, если можно указать такую последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow -\infty$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = z$ . Множество всех  $\omega$ -предельных точек называется  $\omega$ -предельным множеством данной траектории  $\Omega_x$ , а множество всех  $\alpha$ -предельных точек —  $\alpha$ -предельным множеством  $A_x$ . Траектория  $x(t)$  называется *устойчивой по Пуассону*, если каждая ее точка является  $\alpha$ -предельной и  $\omega$ -предельной, т. е.  $x(t) \in \Omega_x \cap A_x$ .



Устойчивость по Пуассону является важным, но слабым свойством устойчивости. Мы ничего не можем сказать о поведении соседних траекторий, изначально близких к начальной точке – притягиваются ли они к исходной траектории или уходят от нее.

Примеры. Состояние равновесия. Ему отвечает фазовая траектория, состоящая из одной точки, и она, очевидно, устойчива по Пуассону.

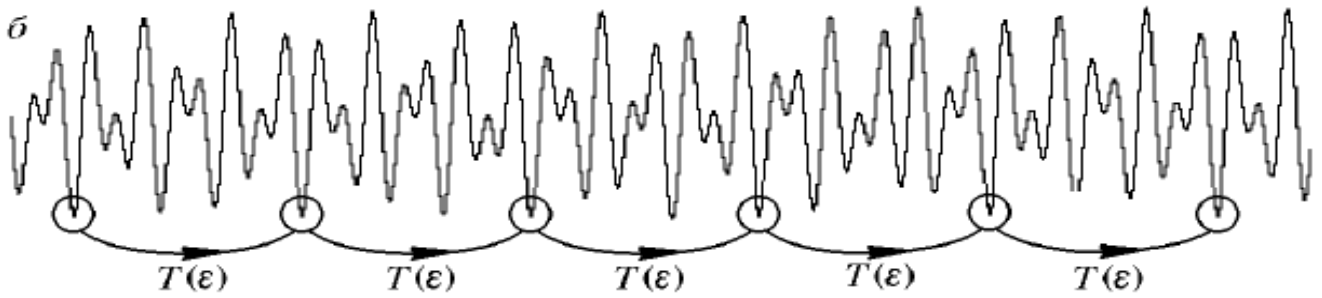
Рассмотрим замкнутую траекторию – предельный цикл. Возвраты Пуанкаре будут фиксироваться периодически со сколь угодно высокой точностью. Время возврата  $T$  есть просто период цикла и оно не от выбора  $\varepsilon$ , по крайней мере, когда  $\varepsilon$  становится достаточно малым.



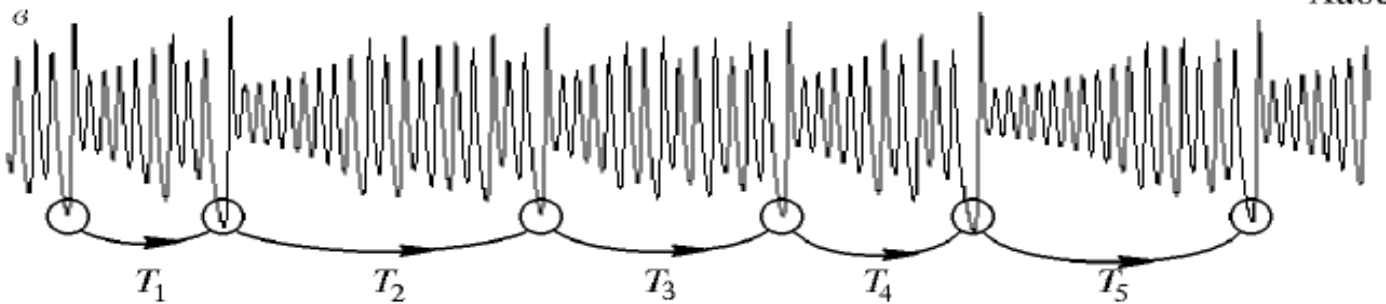
Предположим, что для любого заданного  $\varepsilon$  можно указать период возврата  $T(\varepsilon)$ , один и тот же для любой точки старта на данной траектории, причем при  $\varepsilon \rightarrow 0$  этот период стремится к бесконечности. Иными словами, возвраты с данной степенью точности следуют друг за другом регулярно, с правильной периодичностью, но период увеличивается, если мы ходим увеличить точность сравнения состояний. Такие движения называют *квазипериодическими*. В фазовом пространстве этому типу динамики отвечает траектория, плотно покрывающая поверхность тора.

Динамический хаос – это такая ситуация, когда возвраты Пуанкаре в  $\varepsilon$ -окрестность стартовой точки не проявляют регулярности, интервал времени между двумя последовательными возвратами оказывается каждый раз другим и возникает некоторое статистическое распределение времен возврата.

### Квазипериодический



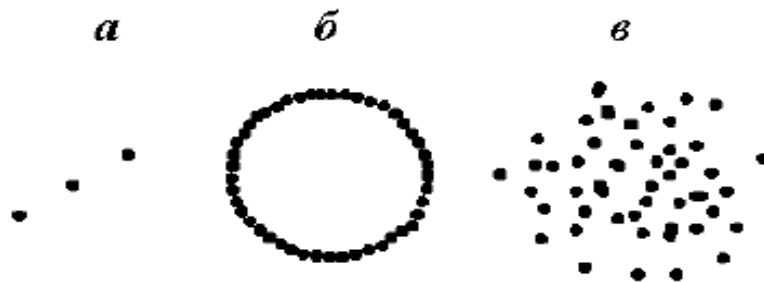
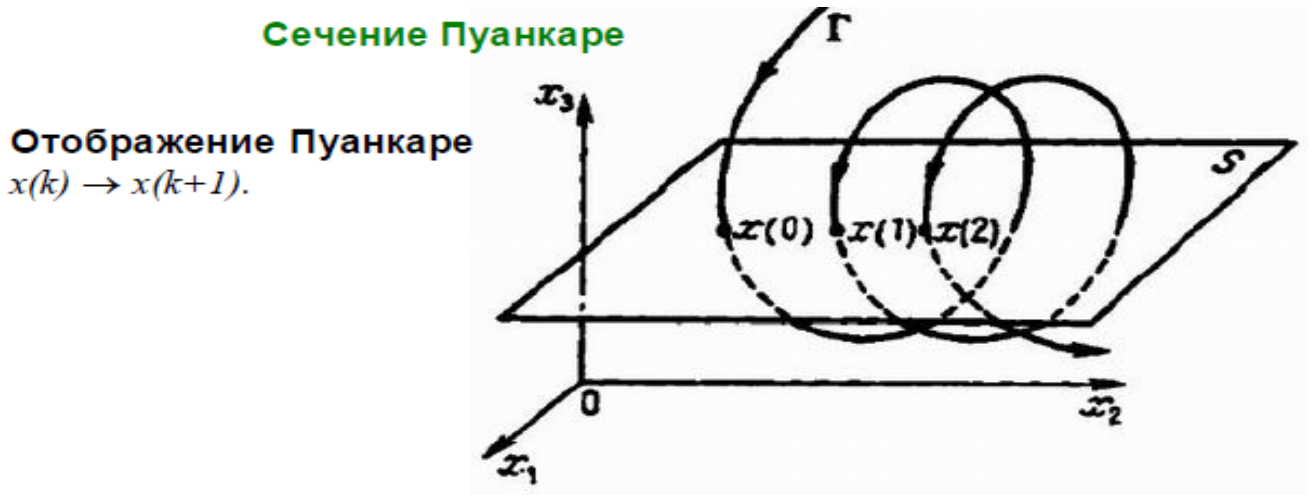
### Хаос



## 9.1. Устойчивость по Лагранжу

Точка  $\mathbf{x}_0$ , а также исходящая из нее фазовая траектория  $\mathbf{x}(t)$  называются *устойчивыми по Лагранжу*, если состояние  $\mathbf{x}(t)$  всегда, при всех  $t > 0$ , остается в некоторой ограниченной области фазового пространства. Иначе говоря, существует такая константа  $R$ , что для всех  $t > 0$  имеем  $\|\mathbf{x}(t)\| < R$ . (Запись  $\|\mathbf{x}(t)\|$  будет в нашем изложении обозначать, как правило, обычную евклидову норму:  $\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_N$  — компоненты вектора  $\mathbf{x}$ .)

Когда в лекции 4 мы показали, что аттрактор Лоренца располагается в ограниченной области фазового пространства, мы доказали тем самым устойчивость множества траекторий системы Лоренца по Лагранжу.



**Вид сечений Пуанкаре для**  
**а) периодического; (б) квазипериодического; (в) хаотического процессов.**

*Периодические, квазипериодические и хаотические движения. Устойчивость по Ляпунову.*

**Формулировка** понятия устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области  $\gamma$  (рис. 16.7, б) можно найти такую область  $\Gamma$ , что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области  $\Gamma$  в при любом сколь угодно большом значении времени  $t$  (см. § 6.1).

В аналитической записи формулировка понятия устойчивости по Ляпунову будет следующей. Невозмущенное движение (установившийся процесс) будет устойчивым, если при заданных



положительных сколь угодно малых числах  $\eta$ , можно найти такие положительные числа  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), что при начальных условиях

$$|x_{i0}| < \eta_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

решение дифференциальных уравнений возмущенного движения (переходного процесса) удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| < \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

при любом сколь угодно большом  $t$ , начиная с некоторого  $t = T > 0$ .

*Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя. Карты ляпуновского показателя и их применение к анализу нелинейных систем?*

*Как в  $d$ -разбиении определить область устойчивости относительно вариации векторных параметров. Ляпуновские показатели меняются и поэтому меняется устойчивость системы.*

Старший показатель  $\alpha_1$  может быть приближенно вычислен и без построения фундаментальных решений уравнений в вариациях

$$\alpha_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{\|x(t) - x(t)\|}{\epsilon}, \quad (13.35)$$

где  $x(t)$  — решение (13.27) с начальным условием  $x(0)$ ,  $\|x(0) - x(0)\| = \epsilon$ , причем  $t$  достаточно велико, а  $\epsilon > 0$  достаточно мало. Для повышения точности расчета можно вычислять среднее правых частей (13.35) при разных начальных условиях  $x_0$ , взятых на траектории  $x(t)$ . Тогда  $t$  необязательно брать очень большим [68].

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория  $x(t)$  аппроксимируется через время  $T$  другой траекторией с погрешностью  $\Delta$ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\epsilon}, \quad (13.36)$$

где  $\epsilon$  — начальная погрешность. Следовательно, хаотическую

## Билет №14

1. Фазовый портрет нелинейных систем. Бифуркации. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы: слияние с исчезновением устойчивого и неустойчивого циклов, вынужденные колебания нелинейного осциллятора, бифуркация слияния точек узел-седло.

Фазовый портрет нелинейных систем.

Лекции + Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Баутин Н.Н., Леонтович Е.

Тудем считатъ  $u(t) = 0$   
Поведение НЛС  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^n$  зависит от н.у.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (5.1)$$

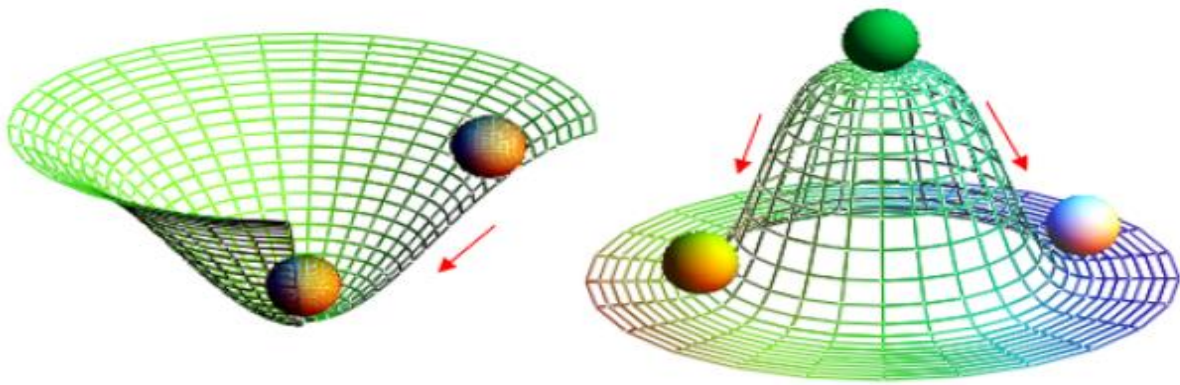
$$\dot{x} = Ax \quad (5.2) \quad x - 1 \times n - \text{в-р составляющей}$$

$n \times n$

У НЛС может быть несколько особых точек с разной динамикой и разной устойчивостью. НУ определяют то, ближе к какой из них мы окажемся. Т.е. какая будет влиятельнее, такая и определит динамику.

Геометрическая интерпретация ур-ния (5.1)  
м.б. дана как семейство кривых в пространстве размерности  $n$  с координатами  $\{x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\}$ .

- 1)  $n$ -мерное фазовое пространство
- 2) траектории, явл. решениями (5.1) — фазовые траектории
- 3) Фазовый портрет — представление фазовых траекторий в фазовом пространстве
- 4) Обратная точка — решение (5.1) на фазовой кривой в момент времени  $t$  при заданных н.у.

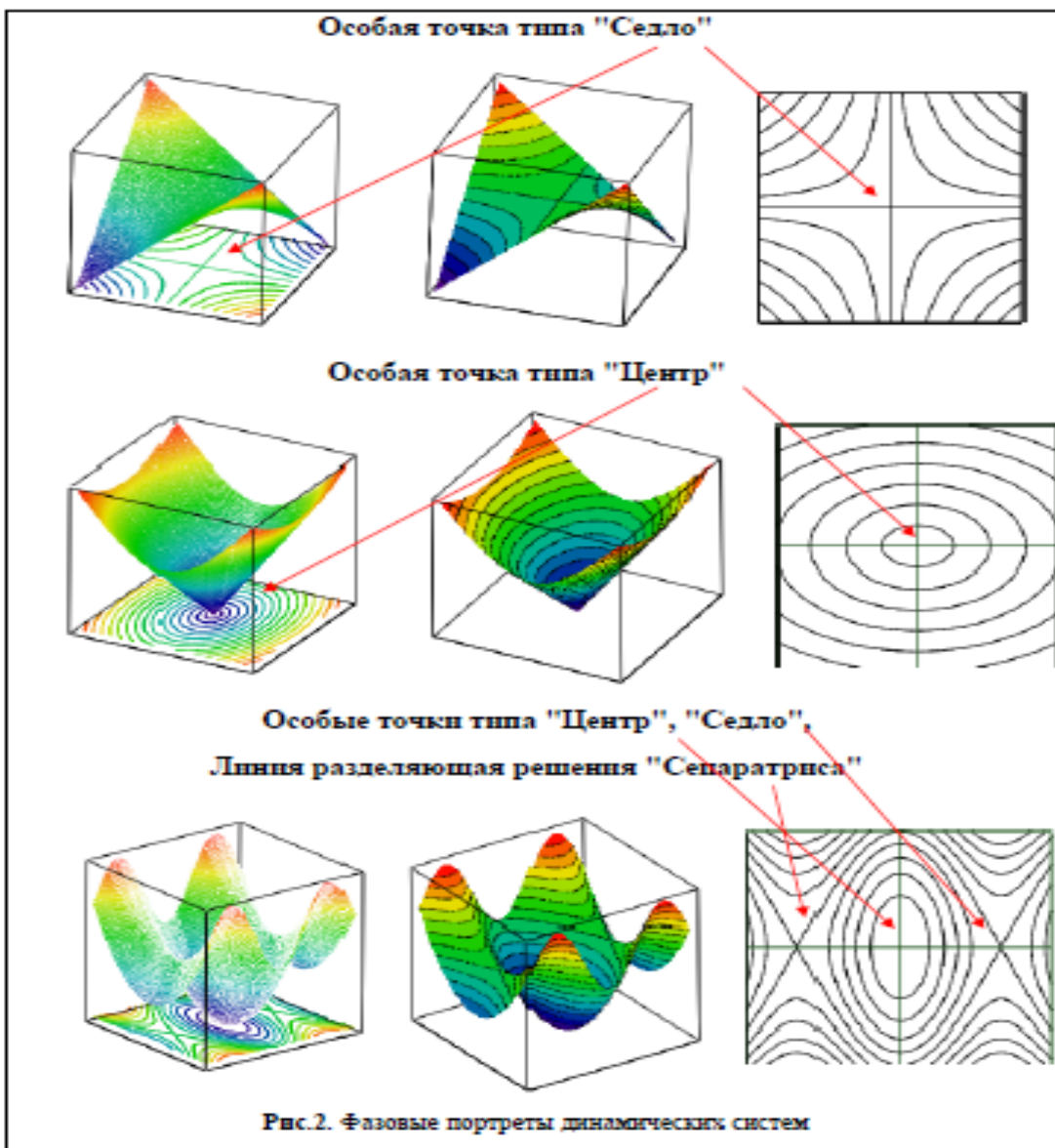


**Рис. 1** Устойчивая система

Неустойчивая система

Любая электромеханическая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.

Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них сложных динамических процессов использует фазовое пространство, в котором строятся фазовые портреты (см. рис. 2). Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются особые точки – точки положения равновесия, которые помогают, без решения дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки равновесия могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы (см рис). Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать что может привести к разрушению системы (см. рис/ 2).



## Элементы фазовых портретов нелинейных систем:

### ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

- изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве динамич. системы, изображающая периодич. движение. В окрестности П. ц. фазовые траектории либо удаляются от него (неустойчивый П. ц.), либо неограниченно приближаются к нему - "наматываются" на него (устойчивый П. ц.). Поведение траекторий в окрестности П. ц. связано со значениями его мультипликаторов (см. Бифуркация). Устойчивый П. ц. является матем. образом периодич. автоколебаний.

### СЕПАРАТРИСА

- траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаяся к седловому состоянию равновесия при времени  $t \rightarrow \infty$  (устойчивая С.) или при  $t \rightarrow -\infty$  (неустойчивая С.). Если С. стремится к седлу при  $t \rightarrow \pm \infty$ , то её (вместе с седлом) называют петлей С. Надо добавить другое определение сепаратрисы. Тут очень жесткое определение.

*Бифуркации. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы: слияние с исчезновением устойчивого и неустойчивого циклов, вынужденные колебания нелинейного осциллятора, бифуркация слияния точек узел-седло.*

$$J\ddot{x} + h\dot{x} = M_p(\varphi)$$

Уравнение движения лодки.

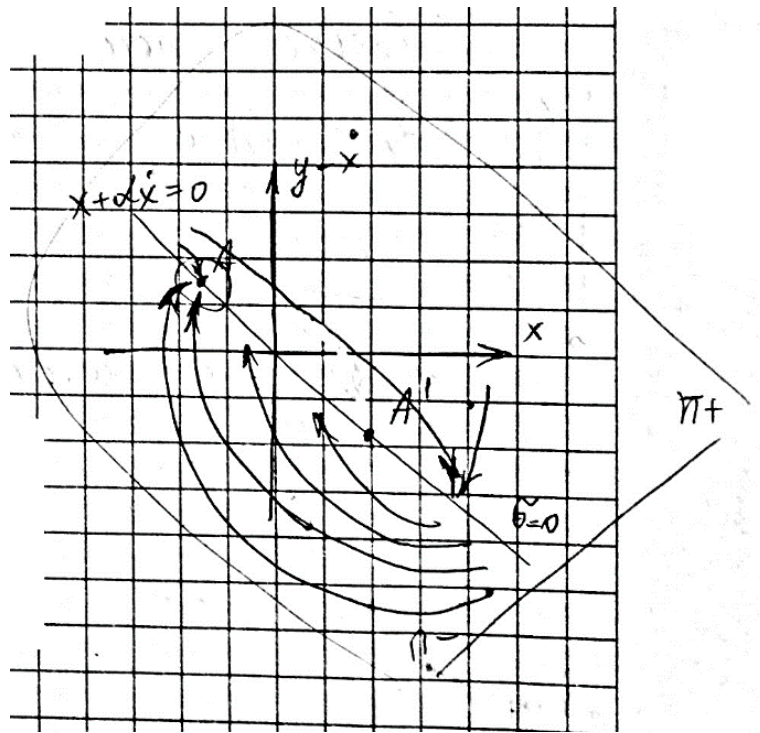
$x, \varphi$ - угол откл.
$J$ - момент инерции откл-ко цм
$h$ - коэффициент
$M_p$ - вращ. момент, созд. поворотом руля

$$M_p = -c\varphi, \quad c > 0$$
$$\varphi = \begin{cases} +\varphi_0, & \text{если } \dot{\sigma} = \dot{\alpha} + \alpha > 0 \\ -\varphi_0, & \text{если } \dot{\sigma} = \dot{\alpha} + \alpha < 0 \end{cases}$$

$\pm \varphi_0$  - предельное поворота руля.  
Руль неизбежно переключается в крайнее правое положение при  $\dot{\sigma} > 0$ , в крайнее левое при  $\dot{\sigma} < 0$ .



$$(4) \quad \ddot{x} + \alpha \dot{x} = k \psi$$



На рисунке изображены два ФП в полуплоскости  $\pi^+$  и  $\pi^-$ . То есть в  $\pi^+$  одна система уравнений, в  $\pi^-$  другая. Общий ФП склеен по прямой  $x + \alpha \cdot \dot{x} = 0$ . То есть склеенный режим представляет собой склейку двух ФП по какой-либо границе.

$$(5) \quad \varphi = \begin{cases} 1 & ; & \sigma > 0 \\ -1 & ; & \sigma < 0 \end{cases}, \quad \sigma = \alpha \dot{x} + x$$

Скользящий режим – режим движения релейной системы вдоль прямой  $\sigma$  (в двумерной системе), сопровождающийся бесконечно частыми переключениями управления.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} &= -k \psi_{\Delta} \\ \sigma &= x + \alpha \dot{x} \end{aligned} \right\} (6)$$

$\psi_{\Delta}$  – оператор усреднения.

Скользящий режим – вариант склеенного режима, при котором возникают сходящиеся колебания, сходящиеся к какому-то пределу и при этом их частота бесконечно увеличивается.

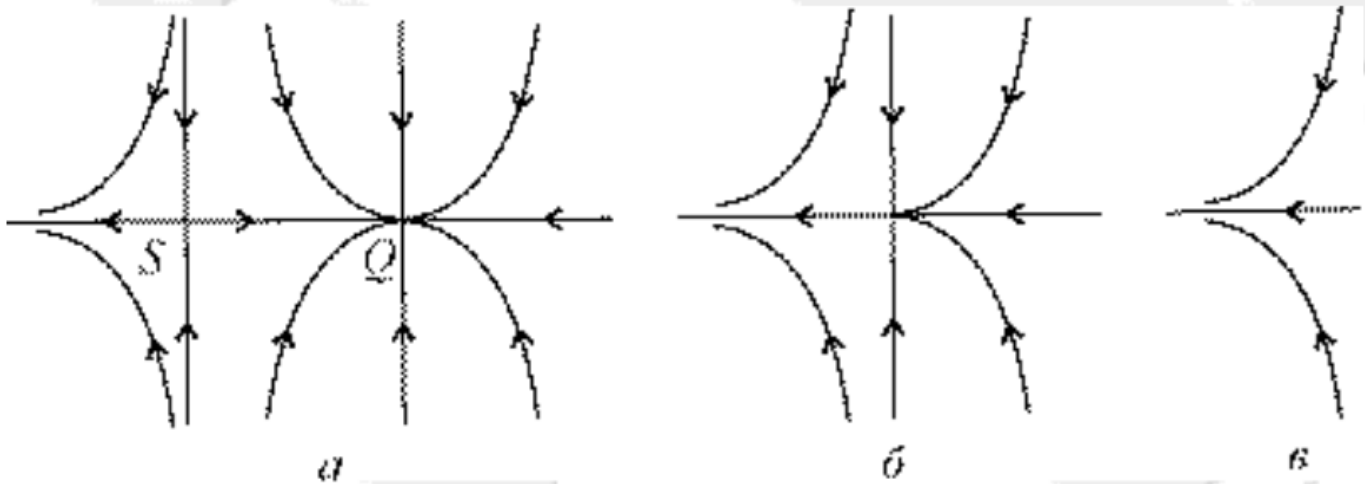
Есть система с 2 особыми точками - узел и седло. Одна точка устойчива, другая полуустойчива (седло). Когда узел с седлом начинают сближаться и практически падают одна на другую возникает особая область, где производные очень маленькие. То есть это не особая точка, потому что нигде производная не равна нулю. Производная очень мала, там происходит существенное замедление фазовых траекторий.



**Седло-узловая бифуркация (складка).**

Пусть в системе при  $\alpha < \alpha^*$  существуют два состояния равновесия: устойчивый узел Q и седло S (Рис. 6.5, а). При  $\alpha = \alpha^*$  происходит слияние узла и седла с образованием негрубого состояния равновесия, называемого седло-узлом, (рис. 6.5, б).

При  $\alpha > \alpha^*$  положение равновесия исчезает (рис. 6.5, в). Переменная  $x$  с течением времени стремится к бесконечности.



**2. Анализ фазовой траектории на устойчивость по линейному приближению и теоремы Ляпунова. Ляпуновские характеристические показатели (что такое спектр, пример вычисления для особой точки, связь с линейной системой). Ляпуновские показатели аттракторов, определение аттракторов, их виды, правила сигнатур, знаков ляпуновских показателей.**

*Анализ фазовой траектории на устойчивость по линейному приближению и теоремы Ляпунова.*

**Формулировка** понятия устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области в (рис. 16.7, б) можно найти такую область  $\gamma$ , что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области в при любом сколь угодно большом значении времени  $t$  (см. § 6.1).

В аналитической записи формулировка понятия устойчивости по Ляпунову будет следующей.

Невозмущенное движение (установившийся процесс) будет устойчивым, если при заданных положительных сколь угодно малых числах  $\varepsilon$ , можно найти такие положительные числа  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),

что при начальных условиях

$$|x_{i0}| < \eta_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

решение дифференциальных уравнений возмущенного движения (переходного процесса) удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

при любом сколь угодно большом  $t$ , начиная с некоторого  $t = T > 0$ .

**4.5.2. Критерий устойчивости Ляпунова по линейному приближению.** Пусть уравнения нелинейной системы представлены в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad R_i(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x}), \quad R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

где

$$|R(\mathbf{x})|^2 = \sum_{i=1}^n R_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1+\alpha}. \quad (4.26)$$

Здесь  $\alpha$  — малое положительное число,  $c$  — положительная константа. Условие (4.26) означает, что разложение нелинейного члена  $R(\mathbf{x})$  в (4.25) в ряд Тейлора в начале координат начинается с членов, содержащих квадраты или более высокие степени фазовых координат и их произведения.

*Теорема 4.19 (критерий устойчивости Ляпунова нелинейной системы). Положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  нелинейной системы (4.25) асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  имеют отрицательную вещественную часть, и неустойчиво, если среди указанных корней имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью.*

Источники – Бесекерский параграф 16.1 + Ким 4.5

Ляпуновские характеристические показатели (ЛП): спектр, пример вычисления для особой точки, связь с линейной системой, геометрический смысл ЛП. ЛП аттракторов: определение аттракторов, их виды, правило сигнатур (знаков ЛП).

## Показатели Ляпунова.

$$D(t) = D(0)e^{\lambda t} \quad \lambda = \lim_{\substack{D(0) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)}$$

$\lambda$  - показатель Ляпунова

Для одномерной системы:

- $\lambda = 0$  - расстояние между точками сохраняется, а система является консервативной.
- $\lambda < 0$  - расстояние между точками уменьшается, а аттрактором могут быть только неподвижные точки. Иначе пишут  $\lambda = (-)$
- $\lambda > 0$  - расстояние между точками экспоненциально увеличивается, траектории стремятся к бесконечности.  $\lambda = (+)$ .

В двумерной системе возможные аттракторы - точки и предельные циклы:

- $(\lambda_1; \lambda_2) = (-; -)$  аттрактор - устойчивая стационарная точка (фокус или узел);
- $(\lambda_1; \lambda_2) = (-; 0)$  аттрактор - предельный цикл.

В трехмерной системе возможные аттракторы - точки, предельные циклы, инвариантные торы, странные аттракторы:

- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (-; -; -)$  аттрактор - фокус или узел);
- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; -; -)$  аттрактор - предельный цикл;
- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; 0; -)$  аттрактор - устойчивый инвариантный тор;
- $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (+; 0; -)$  странный аттрактор.

↑  
спектр

↑  
сигнатуры(знаки)

↑  
виды аттракторов

## **Билет №15**

### ***1. Понятие об адаптивных системах управления. Общие принципы построения адаптивных систем управления.***

**Адаптивное управление** — совокупность методов теории управления, позволяющих синтезировать системы управления, которые имеют возможность изменять параметры регулятора или структуру регулятора в зависимости от изменения параметров объекта управления или внешних возмущений, действующих на объект управления. Подобные системы управления называются адаптивными. Адаптивное управление широко используется во многих приложениях теории управления.

По характеру изменений в управляющем устройстве адаптивные системы делят на:

- самонастраивающиеся (изменяются только значения параметров регулятора)
- самоорганизующиеся (изменяется структура самого регулятора).

По способу изучения объекта системы делятся на:

- поисковые
- беспоисковые.

В первой группе особенно известны экстремальные системы, целью управления которых является поддержание системы в точке экстремума статических характеристик объекта. В таких системах для определения управляющих воздействий, обеспечивающих движение к экстремуму, к управляющему сигналу добавляется поисковый сигнал. Беспоисковые адаптивные системы управления по способу получения информации для подстройки параметров регулятора делятся на:

- системы с эталонной моделью (ЭМ)
- системы с идентификатором, в литературе иногда называют, как системы с настраиваемой моделью (НМ).

Адаптивные системы с ЭМ содержат динамическую модель системы, обладающую требуемым качеством. Адаптивные системы с идентификатором делятся по способу управления на:

- прямой
- косвенный(непрямой).

При косвенном адаптивном управлении сначала делается оценка параметров объекта, после чего на основании полученных оценок определяются требуемые значения параметров регулятора и производится их подстройка. При прямом адаптивном управлении благодаря учёту взаимосвязи параметров объекта и регулятора производится непосредственная оценка и подстройка параметров регулятора, чем исключается этап идентификации параметров объекта. По способу достижения эффекта самонастройки системы с моделью делятся на:

- системы с сигнальной (пассивной)
- системы с параметрической (активной) адаптацией.

В системах с сигнальной адаптацией эффект самонастройки достигается без изменения параметров управляющего устройства с помощью компенсирующих сигналов. Системы, сочетающие в себе оба вида адаптации называют комбинированными.

[wiki]

[F. Chaki современная теория управления. Часть VI]

## 2. Понятие наблюдаемости и управляемости. Критерии наблюдаемости и управляемости. Матрицы Фробениуса и управляемое каноническое представление, управляемая форма Луенбергера, идентификационное каноническое представление, наблюдаемая форма Луенбергера.

Понятие наблюдаемости и управляемости. Критерии наблюдаемости и управляемости. Матрица Фробениуса и управляемое каноническое представление (управляемая форма Луенбергера).

Процесс  $G$  называют **управляемым** если на каждую переменную состояния  $G$  можно целенаправленно воздействовать с помощью неограниченного сигнала управления  $u(t)$  в течении конечного времени.

Процесс  $G$  называют **наблюдаемым** если каждая переменная состояния процесса обуславливает изменение некоторых выходных переменных процесса.

### 2.2. Управляемое каноническое представление

Рассмотрим другую каноническую форму *управляемое каноническое представление (УКП)* [3], которая иногда называется также канонической формой "с общим выходом", канонической формой *фазовой переменной* [47, 102] либо *управляемой формой Луенбергера* [1, 174].<sup>5</sup>

Запишем матрицу  $A$  в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — некоторые коэффициенты.<sup>6</sup> Вычислим ее характеристический многочлен. Как нетрудно убедиться,  $A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ . Таким образом, коэффициенты характеристического многочлена располагаются в последней строке матрицы  $A$ . Матрицы такого вида называются *сопровождающими для своего характеристического многочлена*, или *матрицами Фробениуса*.<sup>7</sup> Данные матрицы обладают рядом интересных свойств (см. [53, 115] и п. 3.2.1. с. 84). В частности, коэффициенты характеристического многочлена таких матриц определяются без вычислений.

*Критерии наблюдаемости и управляемости*

### 7.2. Критерии управляемости

Исследование управляемости линейных стационарных систем можно проводить на основе ряда эквивалентных критериев. Ниже даны некоторые критерии управляемости стационарных систем [3, 30, 83].

1. (Критерий Калмана). *Матрица управляемости*

$$Q_y \triangleq [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad \text{размера } (n \times nt) \quad (7.)$$

имеет полный ранг,<sup>2</sup>  $\text{rank} Q_y = n$ , где  $n$  — размерность пространства состояний системы. Как известно [47], подпро-



2. Не существует ни одной невырожденной матрицы  $T$ ,  $\det T \neq 0$ , такой, что система, полученная преобразованием подобия  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ , имеет матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  вида

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0}_{n_2 \times m} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Такая структура матриц  $\tilde{A}$ , и  $\tilde{B}$  означает, что в соответствующем базисе вектор состояния  $\tilde{x} \in \mathcal{R}^n$  можно представить в виде  $\tilde{x} = \text{col}\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ ,  $\tilde{x}_1 \in \mathcal{R}^{n_1}$ ,  $\tilde{x}_2 \in \mathcal{R}^{n_2}$ ,  $n = n_1 + n_2$ , пр

4. Для любого многочлена  $D(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n$ , где  $d_i \in \mathcal{R}$  заданные постоянные числа, найдется такая  $m \times n$ -матрица  $K$ , что  $\det(s\mathbf{I}_n - A + BK) = D(s)$ .

Это свойство означает, что для полностью управляемой системы всегда имеет решение задача *модального управления по состоянию* обеспечения заданных значений коэффициентов характеристического многочлена замкнутой системы с помощью регулятора в цепи обратной связи вида  $u(t) = -Kx(t)$ .<sup>5</sup>

5. Не существует ни одной отличной от нуля матрицы  $C$  такой, чтобы передаточная функция  $W(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$  тождественно (для всех  $s$ ) равнялась нулю.

6. Равенство  $Ce^{At}B = 0$  при всех  $t$ ,  $t_1 < t < t_2$  для некоторого  $C \in \mathcal{R}^n$  возможно только при  $C = 0$ .

### 7.3. Критерии наблюдаемости. Теорема дуальности

Для исследования наблюдаемости систем также имеется несколько эквивалентных критериев. В частности, по аналогии со свойством п.6 управляемости равенство  $Ce^{At}x_0 = 0$  при всех  $t$ ,  $t_1, t_2, t_1 < t < t_2$  возможно только при  $x_0 = 0$ . Следовательно, наблюдая за выходом  $y(t) = Cx(t)$  такой системы при нулевом входе, всегда можно определить, находится ли система в состоянии равновесия.

Другим критерием полной наблюдаемости является равенство  $\text{rank} Q_n = n$ , где  $n$  — размерность пространства состояний системы,  $Q_n$  — матрица наблюдаемости,  $Q_n \triangleq [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$  размера  $n \times nl$ . В частности, для MISO-систем ( $l = 1$ ) матрица наблюдаемости должна быть невырожденной.

*Идентификационное каноническое представление (наблюдаемая форма Луенбергера).*

Например, применяется также *идентификационное каноническое представление (ИКП)*, или *наблюдаемая форма Луенбергера*, при котором матрица  $A$  является транспонированной матрицей Фробениуса, а  $C = [0, \dots, 0, 1]$ .<sup>3</sup>